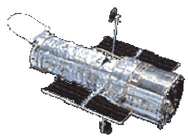
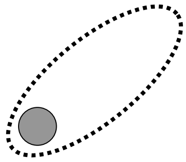
Avaruuslentojen fysiikkaa
(AstroKosmoTaikonautiikka)


Astronautti = länsimainen avaruuslentäjä

Kosmonautti = venäläinen avaruuslentäjä

Taikonautti = kiinalainen avaruuslentäjä

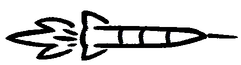
Juhani Kaukoranta
Raahen lukio 2004-2005

Raketin toimintaperiaate: reaktioliike

Newtonin II laki: voima = massa·kiihtyvyys

impulssin derivaatta

$$F = ma = \frac{dp}{dt} = \frac{d\,(mv)}{dt}$$



Newtonin III lain mukaan: Kun raketti työntää palokaasuja (aktio) vakionopeudella taaksepäin, niin kaasu työntää rakettia vastakkaiseen suuntaan. Tästä tulee nimi **reaktioliike** (**jet propulsion**)

”Veneraketti”

Soutaja istuu veneessä, mukanaan 10 kpl 1 kg kiviä. Veneen, soutajan ja kivien yhteinen massa on 150 kg. Soutaja heittää kivet sekunnin välein nopeudella **u=10 m/s** taaksepäin. Minkä nopeuden **v** vene saa viimeisen kiven jälkeen?

Yhteismassa M_0 = 150 kg
kivien massa m = 10 kg
kivien nopeus u = 10 m/s

Kivien heittely keventää venettä, alussa yhteismassa 150 kg, lopussa 140 kg, joten keskimäärin yhteismassa M = 145 kg

Liikemäärä säilyy:

Mv = mu

$$v = \frac{mu}{M} = \frac{10\ \text{kg} \cdot 10\ \text{m/s}}{145\ \text{kg}} \approx 0,69\ \text{m/s}$$

Rakettimoottorin työntövoima

$$k = \frac{dm}{dt}$$

u 

Oletetaan, että palokaasuvirta on vakio **k** (kg/s) ja kaasujen nopeus on vakio **u**. Kaasujen suihkutus vaatii Newtonin II lain perusteella voiman F, joka on kaasun saaman impulssin (liikemäärän) derivaatta:

$$F = \frac{d}{dt}(mu) = \frac{dm}{dt}u = ku$$

Voiman ja vastavoiman lain mukaan raketti työntää kaasuja ja kaasu rakettia ***vakiovoimalla*** **F = ku**
Raketti lähtee siis kiihtyvään liikkeeseen.

Laskuesimerkkejä

1. Moottoriruiskun vesisuihkun nopeus on 34 m/s ja suihkuvirta on 500 litraa minuutissa. Kuinka suurella voimalla ruiskua on pideltävä?

massavirta k = 500 kg / 60 s =8,333 kg/s

F = k· u = 8,333 kg/s · 34 m/s ≈ 280 N

2. Raketin työntövoima on 695 N ja palokaasujen virta 0,225 kg/s. Mikä on palokaasujen nopeus?

$$u = \frac{F}{k} = \frac{695\ \mathrm{N}}{0{,}225\ \mathrm{kg/s}} \approx 3090\ \mathrm{m/s}$$

Paineilmapullon kaula rikkoutuu

Kolarissa kyljellään olevan 200 barin paineilmapullon kaula posahtaa. Oletetaan, että kaulan poikkipinta on 1,0 cm^2. Kuinka suurella voimalla 12 litrainen ja 15 kg massainen pullo lähtee liikkeelle?

massa m = 15 kg
ala A = 1,0 cm^2 = 0,0001 m^2
p = 200 bar = 200 00 000 Pa
(1 bar = 100 000 pascalia)

paine työntää:
F = p·A = 2000 N

$$\text{Alkukiihtyvyys } a = \frac{F}{m} = \frac{2000\ \mathrm{N}}{15\ \mathrm{kg}} = 133\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Pullo lähtee siis salamannopeasti...

Tsiolkovskin rakettiyhtälö

Nyt voimme laskea Newtonin II lain avulla raketin saaman kiihtyvyyden. Ongelmana on se, että raketin **massa kevenee** koko ajan, jolloin työntövoiman pysyessä samana raketin kiihtyvyys kasvaa koko ajan.

Olkoon raketin alkumassa M_0, palokaasujen virta k ja nopeus u

Moottorin työntövoima $F = ku$

Tällöin raketin massa hetkellä t on $M = M_0 - kt$

$$\text{Kiihtyvyys} \quad a = \frac{F}{M} = \frac{ku}{M_0 - kt}$$

Tsiolkovskin rakettiyhtälö

Kiihtyvyys on nopeuden derivaatta, joten $a = \frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ku}{M_0 - kt}$$

Integrointia varten $\quad dv = \frac{ku}{M_0 - kt} dt$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \text{-u} \int_0^t \frac{\text{-k}}{M_0 - kt} dt$$

Integrointi onnistuu, oikealle saadaan luonnollinen logaritmi

Tsiolkovskin rakettiyhtälö

Integroidaan ja sijoitetaan integroimisrajat:

$$v - v_0 = -u\,(\ln(M_0 - kt) - \ln(M_0))$$

Vasemmalla on raketin nopeuden kasvu Δv, oikealla luonnolliset logaritmit voidaan yhdistää:

$$\Delta v = u \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - kt}\right)$$

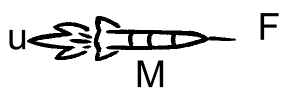
Koska $M = M_0 - kt$, voidaan yhtälö kirjoittaa myös:

$$\Delta v = u \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M}\right)$$

raketin alkumassa M_0

raketin loppumassa M

Tsiolkovskin rakettiyhtälö



Raketin massa kevenee arvosta M_0 arvoon M, kun polttoaine palaa. Raketin nopeuden kasvulle saatiin:

$$\Delta v = u \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M}\right)$$

Raketin nopeus voi siis kasvaa paljon suuremmaksi kuin palokaasujen nopeus, jos massasuhde M_0/M on suurempi kuin Neperin luku e =2,718...Tällöin suurin osa raketin alkumassasta on polttoainetta. Käytännössä raketti on siis jättimäinen polttoainekanisteri...

MARS ODYSSEY-luotaimen JARRUTUS

Mars Odysseyn massa oli 725 kg, kun se aloitti Marsin takana jarrutuspolton. Rakettimoottorin työntövoima oli 695 N. Poltto kesti 1182 sekuntia, polttoainetta kului 266 kg.

a) Kuinka suuri oli luotaimen jarrutushidastuvuus polton alussa?

F=m•a, josta $a = \frac{F}{m} = \frac{695\ \text{N}}{725\ \text{kg}} \approx 0{,}959\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

b) Kuinka suuri oli kiihtyvyys polton lopussa ?

työntövoima F = 695 N pysyy koko ajan samana, mutta luotaimen **massa** on lopussa **pienentynyt** 266 kg

$$a = \frac{F}{m} = \frac{695\ \text{N}}{725\ \text{kg} - 266\ \text{kg}} = \frac{695\ \text{N}}{459\ \text{kg}} \approx 1{,}51\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

MARS ODYSSEY-luotaimen JARRUTUS

Mars Odysseyn massa oli 725 kg, kun se aloitti Marsin takana jarrutuspolton. Rakettimoottorin työntövoima oli 695 N. Poltto kesti 1182 sekuntia, polttoainetta kului 266 kg.

c) Kuinka suuri oli palokaasujen nopeus?

$$F = ku, \text{ josta } u = \frac{F}{k} = \frac{695\ \text{N}}{266\ \text{kg} / 1182\ \text{s}} \approx 3090\ \text{m/s}$$

d) Kuinka suuri oli luotaimen nopeuden lasku?

$$\Delta v = u \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) = 3088\ \text{m/s} \cdot \ln\left(\frac{725\ \text{kg}}{725\ \text{kg} - 266\ \text{kg}}\right) \approx 1410\ \text{m/s}$$

”Veneraketti” Tsiolkovskin mukaan

Soutaja istuu veneessä, mukanaan 10 kpl 1 kg kiviä. Veneen, soutajan ja kivien yhteinen massa on 150 kg. Soutaja heittää kivet sekunnin välein nopeudella 10 m/s taaksepäin. Minkä nopeuden vene saa viimeisen kiven jälkeen, kun lasketaan Tsiolkovskin yhtälön mukaan?

Yhteismassa alussa M_0 = 150 kg
Yhteismassa lopussa M = 140 kg
”Kivisuihkun” nopeus u = 10 m/s

$$\text{Nopeuden muutos } \Delta v = u \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) = 10\ \text{m/s} \cdot \ln\left(\frac{150\ \text{kg}}{140\ \text{kg}}\right) \approx 0,69\ \text{m/s}$$

Siis saman tuloksen kuin laskettaessa liikemäärän säilymisen periaatteella. Syy: massan muutos on pieni.

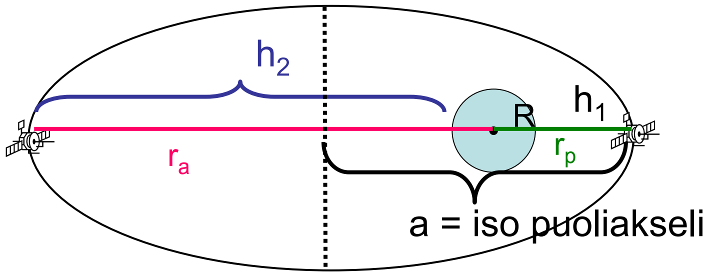
Laskutehtävä: Space Cadet Andy Rocca

Space Cadet Andy Rocca on pelastautunut sukkulastaan Kuun kiertoradalle pelkässä avaruuspuvussa. Hänellä on isoisoisänsä perinne-Suomi KP/31. 500 km korkeudella radan ylimmässä kohdassa Andy huomaa, että radan alin kohta hipaisee väistämättä Kuuta. Andy päättä nostaa rataa ampumalla 5 sekunnissa KP:n 70 patruunan lippaan tyhjäksi lentosuuntaa vastaan, jolloin hän saa lisäimpulssin.
Kuinka suuren lisänopeuden Andy Rocca saa, kun hänen massansa varusteineen on 100 kg, luodin massa on 7,5 g ja luodin nopeus on 400 m/s?

Ohje: Laske ensin perinteisellä liikemäärän säilymislailla, koska luotien mukana poistuvan massa on pieni. Laske sen jälkeen Tsiolkovskin rakettiyhtälöllä ja vertaile tuloksia. ***(2,1 m/s)***

Keplerin 1. laki satelliitille

1. Satelliitti kiertää planeetta ellipsiradalla, jonka toisessa polttopisteessä on planeetan keskipiste

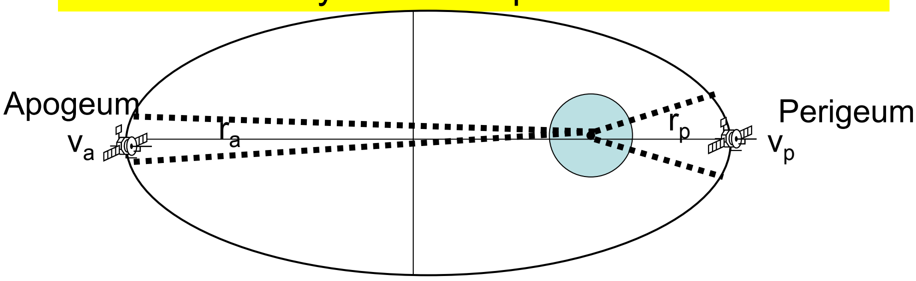


$a = (h_1 + h_2 + 2R)/2 = (h_1+h_2)/2 + R$
$2a = r_a + r_p$

Ympyräradalla ellipsi on ympyrä ja a = h + R

Keplerin 2. laki satelliitille

2. Satelliitin ratavektori pyyhkäisee yhtä pitkinä aikaväleinä yhtä suuret pinta-alat



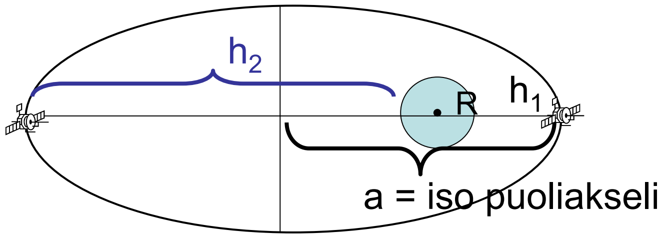
Kauimpana satelliitti liikkuu paljon hitaammin kuin lähimmässä kohdassaan. Tällöin saadaan ratanopeuksille

$\mathbf{v_p \cdot r_p = v_a \cdot r_a}$, jossa $\mathbf{r_a + r_p = 2a}$

(Itse asiassa impulssimomentin säilymislaki)

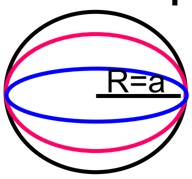
Keplerin 3. laki satelliitille

3. Satelliitin kiertoajan neliö on verrannollinen ellipsin pitemmän puoliakselin kuutioon



Keplerin 3. lain perusteella kaikilla ellipsiradoilla, joilla on **sama iso puoliakseli**, on myös **sama kiertoaika**. Ellipsin soikeus ei siis vaikuta, **ainoastaan iso puoliakseli**. Erikoistapaus on ympyrärata, jossa säde R = a.

Keplerin 3. laki satelliitille



Oheisilla ellipseillä on sama iso puoliakseli a, niillä on siis sama kiertoaika. Lasketaan ympyräradan kiertoaika, joka on samalla näiden kaikkien ellipsiratojen kiertoaika.

Planeetan massa M, satelliitin massa m, radan säde R=a, ratanopeus v ja kiertoaika T. Keskeiskiihtyvyys on yhtä suuri kuin painovoima. Lennetään yksi ratakierros, joten

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

$$v \cdot T = 2\pi R$$

Näistä saadaan nopeus v ja kiertoaika T

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Keplerin 3. laki satelliitille

Ympyräradalla, jonka säde R = a saatiin kiertoajaksi T:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Koska R = a, saadaan lopulta **kaikille** niille ellipsiradoille,joiden iso puoliakseli on a, kiertoajaksi T:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

Kaava pitää paikkansa, jos satelliitin massa on mitätön verrattuna planeetan massaan M.
Kaavan mukaan **kiertoaika riippuu ainoastaan ison puoliakselin pituudesta**, ei ellipsin soikeudesta.

Tarkemmat laskut

Laskukaavoissa hyvin usein esiintyy gravitaatiovakio G ja planeetan tai Auringon massa M. Gravitaatiovakion arvoa ei tunneta kovin suurella tarkkuudella eikä myöskään planeettojen massoja.

Käytännön laskuissa ei kuitenkaan tarvita erikseen **gravitaatiovakioa M** eikä **planeetan massaa M**.
Sensijaan laskuissa esiintyy näiden tulo **GM**. Se tunnetaan **hyvin tarkasti**. Sen arvo voidaan laskea satelliitin kiertoajan perusteella.

Maa-planeetalle GM = 3,986 004 418 $\cdot 10^{14}$ m^3s^{-2}
Auringolle GM = 1,327 124 40018 $\cdot 10^{20}$ m^3s^{-2}

Tulo GM eri planeetoille

Kohde	Tulo GM m^3s^{-2}
Aurinko	1,32712440018 E+20
Merkurius	2,2032 E+13
Venus	3,24859 E+14
Maa	3,986004418 E+14
Mars	4,2828 E+13
Jupiter	1,26686534 E+17
Saturnus	3,7931187 E+16
Neptunus	5,793947 E+15
Uranus	6,836529 E+15
Pluto	1,001 E+12

Laskuesimerkki : Sputnik 1

Sputnik 1 laukaistiin radalleen 4.10.1957. Radan lähimmän kohdan etäisyys Maapallon pinnasta oli 227 km (perigeum) ja kaukaisimman kohdan korkeus 945 km (apogeum). Maapallon säde on 6370 km. Laske Sputnik 1:n kiertoaika

a = (227 km + 945 km) / 2 + 6370 km = 6956 km

GM = $3{,}986\ 004\ 418 \cdot 10^{14}\ m^3/s^2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

T≈ 5774 s ≈ 96 minuuttia

Laskuesimerkki: Planeetan massa

Marsin kuun Phoboksen kiertoaika on 7 h 39,5 min ja ympyränmuotoisen radan säde on 9380 km. Laske Marsin massa.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3, \text{ koska Marsin massa M >> Phobos}$$

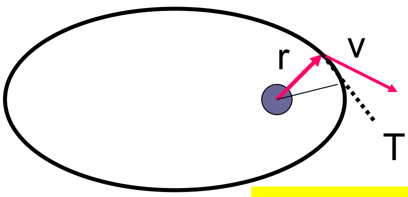
a = 9380 · 10^3 m
T = 7h 39,5 min = 27570 s
G = 6,6726·10^{-11} Nm^2 kg^2

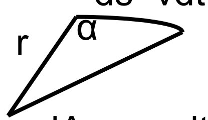
$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

M ≈ 6,42· 10^{23} kg

Impulssimomentin säilymislaki

Keplerin 2. lain mukaan satelliitin ratavektori pyyhkäisee yhtä pitkinä aikaväleinä yhtä suuret pinta-alat. Siis kiertoradan pintanopeus, pinta-alan derivaatta ajan suhteen, on vakio.





dA = = vdt·r·sinα / 2

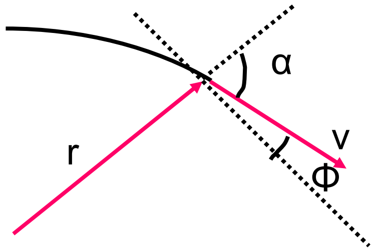
$$\text{Joten pintanopeus } \frac{dA}{dt} = \frac{vr\sin\alpha}{2} = \text{vakio}$$

$$\text{siis } v_1 r_1 \sin\alpha_1 = v_2 r_2 \sin\alpha_2$$

$$(\text{Vektoreina } \vec{L} = m\vec{v} \times \vec{r} = \text{impulssimomenttivektori} = \text{vakio})$$

Impulssimomentti ja tulokulma

Nopeusvektorin ja paikkavektorin välisen kulman sijasta on kätevämpää käyttää **tulokulman** käsitettä. Tulokulma eli ”**flight-path**” on nopeusvektorin ja paikkavektorin normaalin välinen kulma Φ



Tällöin

$$\mathrm{vrsin}\alpha = \mathrm{vrcos}\theta = vakio$$

$$\mathrm{v_1 r_1 cos}\phi_1 = \mathrm{v_2 r_2 cos}\phi_2$$

Tämän ja energian säilymislain avulla voidaan laskea meteorin ja komeetan radan kaartuminen sen syöksyessä kohti Maata, kun ilmakehän vastus ei vielä vaikuta.

Potentiaalienergia

Siirretään kappale etäisyydeltä r_0 äärettömän kauaksi. Kuinka suuri työ tehdään?

$$\text{Painovoimalaki } F = \frac{GMm}{r^2}$$

G =6,6726·10^{-11} Nm^{2}kg^{-2}
M = planeetan massa
m = nostettava kappale
r = etäisyys planeetasta

$$\text{Nostotyö } W = \int_{r_0}^{\infty} \frac{GMm}{r^2}\,dr = -\left.\frac{GMm}{r}\right|_{r_0}^{\infty} = \frac{GMm}{r_0}$$

Tästä saadaan potentiaalienergian käsite. Valitaan potentiaalienergian nollataso äärettömyyteen. Tällöin potentiaalienergia on aina negatiivinen.

$$W_{pot} = -\frac{GMm}{r}$$

Energian säilymisperiaate

Vapaalla radalla massakeskuksen M vaikutuspiirissä liike-energian ja potentiaalienergian summa säilyy. (Pot.energian nollataso on valittu äärettömyyteen, siksi miinusmerkki)

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_2}$$

Sievennettynä (pätee **kaikille** vapaille radoille)

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{GM}{r_1} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{GM}{r_2}$$

Kaava ottaa huomioon painovoiman riippuvuuden etäisyydestä. (Koululaskuissa painovoima oletettiin vakioksi)

Haemaelaeinen Deimoksen pinnalla

Marsilla on kaksi kuuta, Phobos ja Deimos. Deimoksen tiedot:

massa $M = 1{,}8 \cdot 10^{15}$ kg
keskisäde R=7,49 km
kiertoaika T = 30 h 17,9 min
etäisyys Marsista r = 23 460 km

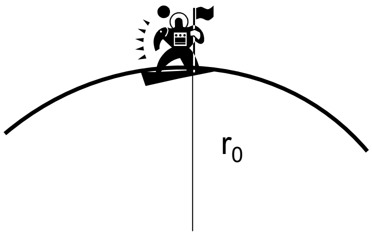
Mestariurheilija Hämäläinen pystyi eläkeläisenäkin hyppäämään Maan pinnalla tasajalkaa 50 cm korkeuteen, mihin tarvittiin 3,1 m/s alkuvauhti. Astronauttina hän ponnisti Deimoksen pinnalla samalla 3,1 m/s nopeudella pystysuoraan. Kuinka korkealle hän nousi?

Laskussa on sovellettava energian säilymislakia, mutta ei samaa kuin koulussa, vaan edellä olevaa yleispätevää lakia.

Haemaelaeinen Deimoksen pinnalla

Alussa nopeus v_0 = 3,1 m/s, lakipisteessä v = 0
Alussa korkeus r_0 = 7490 m, lakipisteessä r

Energia säilyy, joten



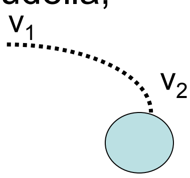
$$\frac{v_0^{\ 2}}{2} - \frac{GM}{r_0} = \frac{0^2}{2} - \frac{GM}{r}$$

Josta saadaan r

$$r = \frac{2GMr_0}{2GM - r_0 v_0^2} = \frac{2 \cdot 6,6726 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}} \cdot 1,8 \cdot 10^{15}\ \mathrm{kg} \cdot 7490\ \mathrm{m}}{2 \cdot 6,6726 \cdot 10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}} \cdot 1,8 \cdot 10^{15}\mathrm{kg} - 7490\ \mathrm{m} \cdot (3,1\ \mathrm{m/s})^2} \approx 10694\ \mathrm{m}$$

Lakikorkeus Deimoksen pinnasta on r - r_0 =
10649 m – 7490 m = **3200 m**

Esimerkki: 1000 tonnin asteroidin nopeus on 15 km/s 50 000 km etäisyydellä Maan keskipisteestä. Mikä on asteroidin nopeus 100 km korkeudella, jolloin ilmakehä alkaa vaikuttamaan?



$$\frac{v_1^{\ 2}}{2} - \frac{GM}{r_1} = \frac{v_2^{\ 2}}{2} - \frac{GM}{r_2}$$

v_1 =15 000 m/s
r_1 = 50 000 000 m
r_2 = (6378+100) km = 6478 000 m
v_2 = ?

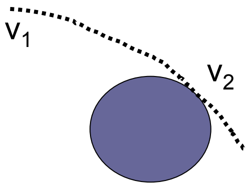
$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2GM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)} \quad \approx \ 18\ \mathrm{km/s}$$

Lentoaika noin 50 min

Jättimäinen komeetta Kali syöksyy kohti Maata. Missä tulokulmassa asteroidi tulee 100 000 km etäisyydellä, jossa sen nopeus on 15 km/s, jotta se ohittaa Maan 60 km korkeudella ja poistuu?

v_1=15 km/s r_1 = 100 000 km
v_2=18,46 km/s r_2 = 6438 km

$\theta_1 = ?$ $\qquad \theta_2 = 0°$



Impulssimomentti säilyy

$v_1 r_1 \cos\phi_1 = v_2 r_2 \cos\phi_2$

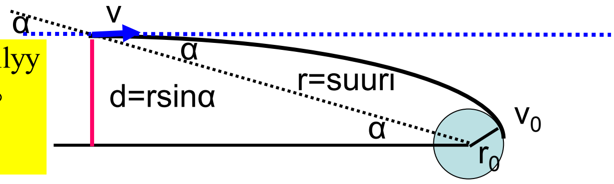
$$\cos\phi_1 = \frac{v_2 r_2 \cos 0°}{v_1 r_1} = \frac{15\ \text{km/s} \cdot 6438\ \text{km} \cdot 1}{18{,}46\ \text{km/s} \cdot 100\ 000\ \text{km}} \approx 0{,}05231...$$

$\theta_1 =$ - 87° (syöksyy siis melko jyrkästi kohti Maata)

Kali synnyttää jättimäisen tulivanan ehkä 80 km korkeudella ja on lähimmillään Maata 60 km korkeudella.
Ajatus on Arthur C. Clarken romaanista "Hammer of God"

Milloin komeetta voi törmätä?

Hyvin kaukana Maasta komeetan kulkusuunnan ja Maan etäisyys on d ja komeetan nopeus v. Törmääkö komeetta?



Impulssimomentti säilyy

$v \cdot r\sin\alpha = v_0 r_0 \sin 90°$

$v \cdot d = v_0 r_0$

Energia säilyy

nollautuu

$$\frac{v^2}{2} - \cancel{\frac{GM}{r}} = \frac{v_0^{\ 2}}{2} - \frac{GM}{r_0}$$

"Juuri ja juuri" tilanne. Jos d on pienempi, komeetta törmää

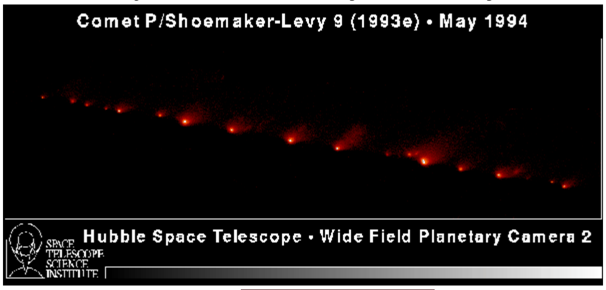
$$\text{josta } v_0 = \sqrt{v^2 + \frac{2GM}{r_0}}$$

$$d = \frac{r_0 v_0}{v} = \frac{r_0\sqrt{v^2 + \frac{2GM}{r_0}}}{v} = \sqrt{r_0^2 + \frac{2GMr_0}{v^2}}$$

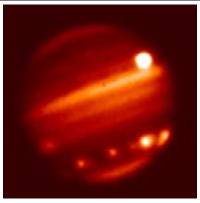
Jos d on tätä pienempi, komeetta törmää Maahan

Shoemaker-Levy 16.7.1994

Laskelmien mukaan Jupiter on suuri komeettojen imuri. Shoemaker-Levyn komeetta hajosi 1994 ja oli törmäyskurssilla.



Ensimmäinen törmäys 16.7.1994
Tässä 21.7.1994
Kuva: NASA



Jotkut tulipallot olivat Maapalloa suurempia

Onneksi Jupiter imuroi komeettoja...

Satelliitin nopeus ellipsiradalla

Impulssimomentti säilyy, joten kaukaisimman ja lähimmän kohdan (apoapsis, periapsis) välille saadaan tärkeä yhteys

$$v_a \cdot r_a = v_p \cdot r_p$$

Energian ja impulssimomentin säilymisestä ja $2a = r_a + r_p$ voidaan johtaa kaikille **ellipsiradoille** kätevä nopeuskaava

$$v^2 = G\,M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

r = etäisyys
a = radan iso puoliakseli

Tässä oletetaan, että satelliitin massa on mitätön planeetan massaan M verrattuna.

Yhteenveto laskukaavoista

Kaikille radoille pätee **energian** säilyminen:

$$\frac{v_1^{\,2}}{2} - \frac{GM}{r_1} = \frac{v_2^{\,2}}{2} - \frac{GM}{r_2}$$

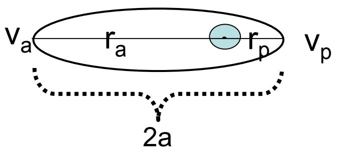
Kaikille radoille pätee **impulssimomentin** säilyminen:

Nopeuden ja ratavektorin kulman avulla $v_1 r_1 \sin\alpha_1 = v_2 r_2 \sin\alpha_2$

Nopeuden ja tulokulman avulla $v_1 r_1 \cos\phi_1 = v_2 r_2 \cos\phi_2$

Ellipsiradalla nopeuden lauseke ja apoapsis ja periapsis:

$$v^2 = G\,M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$



$v_a r_a = v_p r_p$

$r_a + r_p = 2a$

Ellipsi, paraabeli, hyperbeli

Keplerin liikkeessä (rakettimoottori on kiinni, eikä ilmanvastus vaikuta) pätee energian säilyminen

$$\frac{v_1^{\,2}}{2} - \frac{GM}{r_1} = \frac{v_2^{\,2}}{2} - \frac{GM}{r_2} = \text{Kokonaisenergia}$$

Lähellä Maata etäisyydellä r_1 satelliitin nopeus on v_1
Äärettömän kaukana $r_\infty = \infty$, jolloin äärettömän kaukana nopeus v_∞ on

$$v_\infty = \sqrt{v_1^2 - \frac{2GM}{r_1} + \frac{2GM}{r_\infty}} \approx \sqrt{v_1^2 - \frac{2GM}{r_1}}$$

Pakonopeus etäisyydeltä r_1

Jos $v_\infty = 0$, rata on paraabeli, satelliitti pääsee juuri ja juuri pois Maan vaikutuspiiristä

Jos $v_\infty > 0$, rata on hyperbeli, satelliitti irtautuu Maan vaikutuspiiristä

Jos kokonaisenergia < 0, satelliitti on ”vangittu” ellipsiradalle

Ympyränopeus Maan kiertoradalla

a) 300 km korkeudella
r = 6378 km + 300 km = 6678 000 m

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{3{,}986004418 \cdot 10^{14}\ m^3 s^{-2}}{6678000\ m}} \approx 7726\ m/s$$

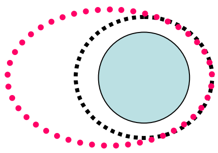
b) 1000 km korkeudella, r = 7378 000 m

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{3{,}986004418 \cdot 10^{14}\ m^3 s^{-2}}{7378000\ m}} \approx 7350\ m/s$$

c) 35 790 km korkeudella v = 3075 m/s
geosynkroninen rata, kiertoaika 23 h 56 min

Satelliitti kiertää 300 km korkeudella ympyrärataa. Sille annetaan 200 m/s lisänopeus. Millaiselle elliptiselle radalle satelliitti siirtyy?

r_0 = 6378 km+ 300 km = 6678 km
v_0 = 7726 m/s (kts edellä)
uusi nopeus v = 7926 m/s



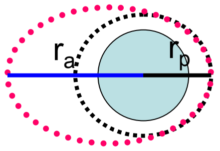
$$v^2 = G\,M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

r = etäisyys
a = radan puoliakseli

Uuden radan alin kohta on r_0 = 6678 km.

$$v^2 = G\,M\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2GM}{r_0} - \frac{GM}{a} = 2v_0^2 - \frac{GM}{a}$$

Uuden radan alin kohta r_p, perigeum, on
on vanhan ympyräradan r_0 = 6678 km. Ylin
kohta, apogeum, on luonnollisesti ylempänä



$$\text{Ratkaistaan } a = \frac{GM}{2v_0^2 - v^2} = \frac{3{,}986004418 \cdot 10^{14}\ m^3s^{-2}}{2\cdot(7726\ m/s)^2 - (7926\ m/s)^2}$$

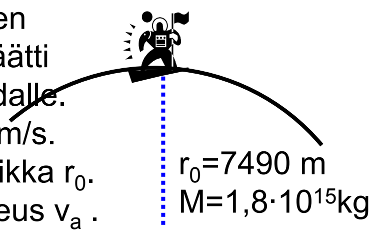
Josta iso puoliakseli **a = 7047,3 km**. Toisaalta a = (r_a+r_p) / 2
apogeum $r_a = 2a - r_p$ = 2·7047,3 km – 6678 km =7417 km

Perigeum r_p = 6678 km, korkeus 300 km ekvaattorista
Apogeum r_a = 7417 km, korkeus 1039 km ekvaattorista

Jos impulssi olisi annettu lentosuuntaa vastaan, nopeus siis
alenisi ja polttokohdasta tulisi ylin kohta, apogeum.

Haemaelaeisen kivenheitto Deimoksella

Vanhana pesäpalloilijana Hämäläinen
löysi Deimoksen pinnalta kiven ja päätti
lähettää sen vaakasuoraan kiertoradalle.
Hän antoi lähtönopeudeksi v_0 = 4,5 m/s.
Radan alin kohta on Hämäläisen paikka r_0.
Laske radan korkein kohta r_a ja nopeus v_a .

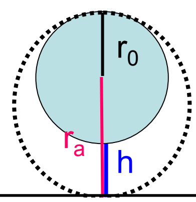


Ellipsiradalla lähtöhetkellä

$$v_0^2 = GM\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right), \text{ ratkaistaan iso puoliakseli a}$$

$$a = \frac{GMr_0}{2GM - r_0 v_0^2}$$

Saadaan **a = 10160 m**
Toisaalta r_0+r_a = 2a, joten $r_a = 2a - r_o$
Saadaan r_a = 2·10160-7490 m
r_a = 12 830 m ja **h = r_a - r_0 = 5340 m**



Haemaelaeisen kivenheitto Deimoksella

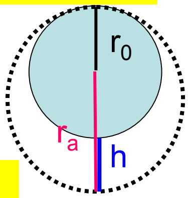
Radan korkeimman kohdan nopeus saadaan helpoimmin impulssimomentin säilymislaista.

Impulssimomentti säilyy

$$v_a \cdot r_a = v_0 \cdot r_0$$

$$r_a = \frac{v_0 r_0}{r_a} = \frac{4,5\,\mathrm{m/s} \cdot 7490\,\mathrm{m}}{12830\,\mathrm{m}} \approx 2,6\ \mathrm{m/s}$$

v_0= 4,5 m/s	a = 10 160 m
M = 1,8·10^{15} kg	r_a = 12 830 m
r_0 = 7490 m	v_a = 2,6 m/s



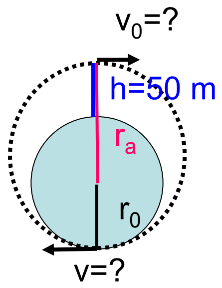
Kiven kierrosaika, siis kivi tulee Hämäläisen kohdalle:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}\,a^3} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 5\text{ h }9\text{ min kuluttua heitosta}$$

Deimoksen vaikutuspiiri on 8,9 km, joten kivi voi mennä H:n ohi

Laskutehtävä: Hämäläisen pallonheitto

Hämäläinen kiipeää Deimoksella näköalatorniin, jonka korkeus on 50 m. Sieltä hän heittää pesäpallon kiertoradalle, jonka alin kohta on juuri ja juuri Deimoksen pinnalla. Hämäläinen ottaa pesäpallosta kopin, kun se tulee uudelleen tornin kohdalle. Kuinka suuri on heiton lähtönopeus v_0? Millä nopeudella v pesäpallo ohittaa Deimoksen toisen puolen? Mikä on kiertoaika T?



r_0 = 7490 m
M = 1,8·10^{15} kg

Ohje: Käytä ellipsiradan nopeuden lauseketta ja ellipsin ison puoliakselin yhteyttä 2a = $2r_0$+h.

Vertailu: Ympyrä ja ellipsi

Ympyrärata

$$v^2 = \frac{GM}{R}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Ellipsirata

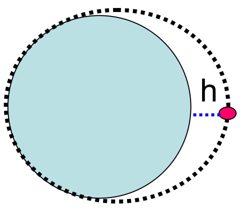
$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

r = satelliitin etäisyys planeetan keskipisteestä
a = ellipsiradan iso puoliakseli
M = planeetan massa
G = painovoimavakio = $6{,}6726 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$

Ellipsikaavoista tulee ympyräkaava, kun a = r

Avaruusaluksen laskeutuminen



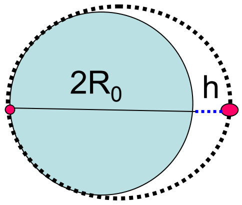
Alus on h=300 km korkeudella. Mikä on edullisin tapa tuoda alus Maahan?

$$\text{Ympyräratanopeus } v_{300} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 7726\ \text{m/s}$$

Jos laskeutuminen halutaan tehdä pystysuoraan alas, joudutaan antamaan **7726 m/s** nopeuden muutos. Tällöin alus alkaa pudota vapaasti. Kallista, koska tarvittava nopeuden muutos on hyvin suuri.

Edullisin jarrutustapa on viedä alus elliptiselle radalle, joka sivua Maapalloa vastakkaisella puolella. Ilmakehä hoitaa sitten loppujarrutukset.

Edullisin elliptinen laskeutuminen



Laskeutumisradan iso puoliakseli
$2a = 2R_0 + h$, josta $a = R_0 + h/2 = 6528$ km

Laskeutumisen lähtönopeus on:

$$v^2 = G\,M\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

R=6678 000 m
a = 6528 000 m

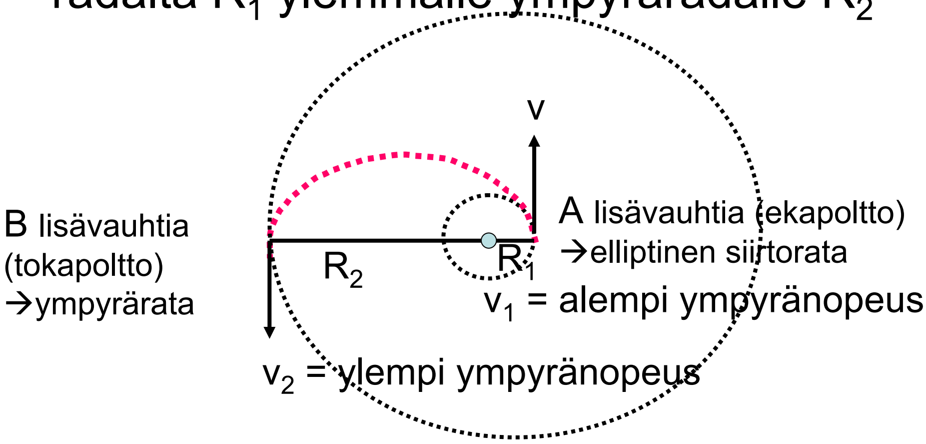
Tästä saadaan v = 7637 m/s, jolloin tarvittava jarrutuspoltto Δv = 7726 m/s – 7637 m/s = **89 m/s**

43 min päästä ilmakehään tulo 90 km korkeudella nopeudella

$$v_{90}^2 = G\,M\left(\frac{2}{R_{90}} - \frac{1}{a}\right) = GM\left(\frac{2}{6468000\text{m}} - \frac{1}{6528000\text{m}}\right), \text{josta } v_{90} = 7886 \text{ m/s}$$

Lämpökilpi ja sen jälkeen laskuvarjot hoitavat loppujarrutuksen

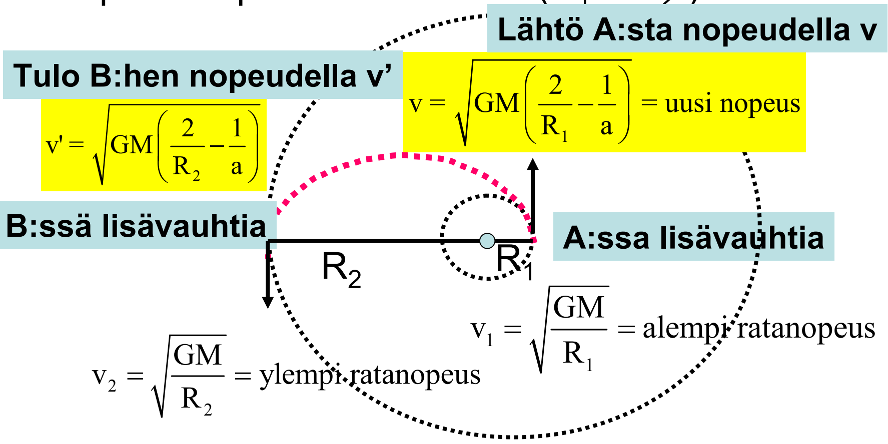
Siirretään satelliitti alemmalta ympyrä-radalta R_1 ylemmälle ympyräradalle R_2



Alus kiertää alemmalla ympyräradalla nopeudella v_1
A:ssa nopeus nostetaan arvoon v, jolloin alus siirtyy B:en
B:ssä nopeus nostetaan arvoon v_2 , alus menee ympyräradalle

Hohmannin siirtoellipsi alemmalta ympyräradalta ylemmälle, kahdella poltolla (mininergiasiirtyminen)

Ellipsin iso puoliakseli on $a = (R_1 + R_2)/2$



Alus kiertää alemmalla ympyräradalla nopeudella v_1
A:ssa nopeus nostetaan arvoon v, alus saapuu B:en elliptisesti nopeudella v'. Siellä nopeus nostetaan ympyrärata-arvoon v_2

Tarvittavat nopeudenmuutokset

A:ssa aluksi ympyräradalla $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}$

Uusi lähtönopeus A:ssa $v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a}\right)}$

Nopeuden muutos = $v - v_1$ (ekapoltto)

Tulo B:een Hohmannin ellipsirataa pitkin nopeudella v' $v' = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R_2} - \frac{1}{a}\right)}$

Uusi haluttu ratanopeus v_2 (jotta päästään ympyräradalle) $v_2 = \sqrt{\frac{GM}{R_2}}$

Nopeuden muutos = $v_2 - v'$ (tokapoltto)

Radanmuutoksen tarvittava aika

Siirtoon tarvitaan ellipsin puolikas.
Iso puoliakseli $a = (R_1 + R_2) / 2$

Täyden ellipsin aika

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} a^3} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

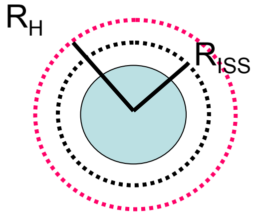
Hohmannin puoliellipsi

$$T = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

Hohmannin v 1925 keksimä siirtoellipsi on energeettisesti edullisimpia radanmuutoskeinoja. Se ei kuitenkaan ole nopein keino. Jos on pelit ja vehkeet, uudelle radalle päästään nopeamminkin.

Lento ISS:lta Hubble-teleskoopille

Avaruusasema ISS lentää 368 km korkeudella ekvaattorin yläpuolella ympyräradalla. Maapallon ekvaattorin säde on 6378 km. ISS:sta lähetetään avaruusalus Hubblelle, joka lentää 573 km korkeudella ympyräradalla ekvaattorin yläpuolella. Laske ISS:n ja Hubblen kohdalla tarvittavat nopeudenlisäykset, jos käytetään Hohmannin siirtoellipsiä.



R_{ISS} = 6378 km + 368 km = 6746 km

$$v_{ISS} = \sqrt{\frac{GM}{R_{ISS}}} = 7687 \text{ m/s (ympyräratanopeus)}$$

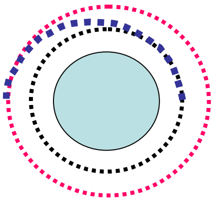
R_H = 6378 km + 573 km = 6951 km

$$v_H = \sqrt{\frac{GM}{R_H}} = 7573 \text{ m/s (ympyräratanopeus)}$$

Lento ISS:lta Hubble-teleskoopille

Hohmannin siirtoellipsiradan alku- ja loppunopeudet

$a = (R_1 + R_2)/2 = 6848{,}5$ km (iso puoliakseli)



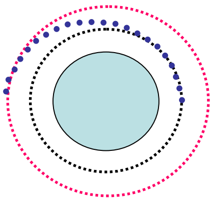
$$\text{Lähtönopeus ISS:sta } v_A = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R_{ISS}} - \frac{1}{a}\right)} = 7744\text{m/s}$$

Nopeuden lisäys v_A-v_{ISS} = 7744 m/s – 7687 m/s
lähdössä ISS:lta (ekapoltto) = **57 m/s**

$$\text{Tulonopeus Hubblelle } v_B = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R_H} - \frac{1}{a}\right)} = 7516\text{ m/s}$$

Nopeuden lisäys $v_H - v_B$ = 7573 m/s – 7516 m/s = **57 m/s**
Hubblen kohdalla (tokapoltto), jotta päästään ympyräradalle.

Siirtymiseen kuluva aika



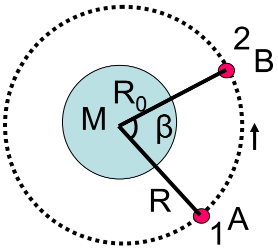
$$T = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

a = 6848,5 km
6848 500 m

T = 2820 s = 47 minuuttia

Käytännössä on vielä laskettava lähtöpolton oikea hetki, jotta alus ja Hubble ovat samalla kohdalla siirron lopussa. Paluulennolla on tehtävä vastakkaiset nopeusmuutokset, jotta päästään takaisin ISS:lle. Tosin ISS ja Hubble eivät lennä aivan samassa tasossa eivätkä radat ole ekvaattoritasossa. Ensin aluksen ratatason inklinaatiokulma on muutettava samaksi kuin Hubblen radan inklinaatio. Vasta sitten aloitetaan poltto, jolla päästään Hubblelle vievälle siirtoellipsille.

Kohtaaminen samalla radalla



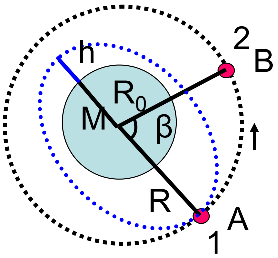
Alukset A ja B kiertävät etäisyydellä R Maapallon keskipisteestä. Maan säde on R_0 ja massa M.

Millä keinoin A saa B kiinni?

Ensimmäiseksi mieleen tulee tietysti se, että A:n pitää **lisätä nopeutta**. Tämä on **virhe**. Tällöin nimittäin A nousee ylemmälle radalle, jonka kiertoaika on **suurempi**. A siis jäisi **entistä enemmän jälkeen** B:stä

Oikea ratkaisu on se, että **A:n pitää jarruttaa**. Tällöin A siirtyy alemmalle radalle, jonka kiertoaika on lyhyempi Kohtaaminen on tapahduttava **kohdassa 1**.

Kohtaaminen samalla radalla



Alkuperäinen rata:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

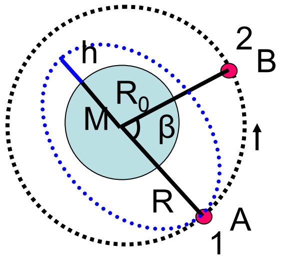
A **jarruttaa** ja siirtyy alemmalle radalle, jonka iso puoliakseli olkoon **a**. tällöin A:n uusi kiertoaika **T** on:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

Ehtona on, ettei A:n uuden ellipsiradan alin kohta ei saa tulla alemmaksi kuin 100 km, ettei ilmakehä sotke asioita.

Uudelle radalle saadaan siten ehto **2a > R_0+R+h**

Kohtaaminen samalla radalla

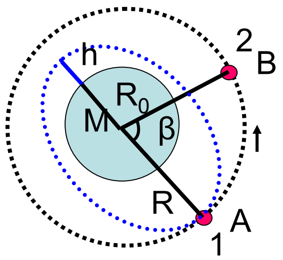


Kohtaaminen voi tapahtua vain kohdassa 1, jossa radat leikkaavat. Edullisinta olisi, että A kiertää yhden kierroksen ja B β astetta vähemmän. 100 km minimikorkeusvaatimus saattaa aiheuttaa sen, että tarvitaan useampia kierroksia.

Oletetaan, että A lentää n kierrosta ja B n kierrosta. Kohtaamishetkellä kummankin lentoajat ovat yhtä suuria:

$$\underbrace{n \cdot 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}}_{\text{A:n lentoaika}} = \underbrace{\frac{360n - \beta}{360} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}}_{\text{B:n lentoaika}}$$

Kohtaaminen samalla radalla



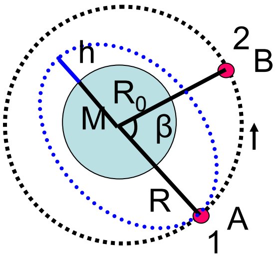
$$\underbrace{n \cdot 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}}_{\text{A:n lentoaika}} = \underbrace{\frac{360n - \beta}{360} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}}_{\text{B:n lentoaika}}$$

Näistä ratkaistaan A:n uuden radan iso puoliakseli a:

$$a = R \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{360n - \beta}{360n}\right)^2}$$

Ehtona on, että **$2a > R_0 + R + h$**, jossa h = 100 km
Etsitään pienin kokonaisluku n, jolla ehto toteutuu.

Kohtaaminen samalla radalla



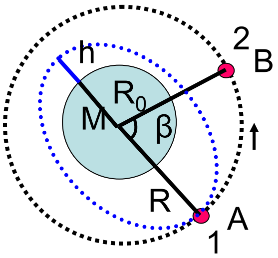
$$a = R \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{360n - \beta}{360n}\right)^2}$$

Päästäkseen uudelle radalle A:n on tehtävä jarrutuspoltto :

$$\Delta v = v_1 - v = \underbrace{\sqrt{\frac{GM}{R}}}_{\text{ympyräratanopeus}} - \underbrace{\sqrt{GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)}}_{\text{A:n uusi ellipsiratanopeus}}$$

Kohtaamishetkellä on tehtävä yhtä suuri nopeudenlisäys, jotta alusten nopeudet olisivat yhtä suuria.

Yhteenveto: kohtaaminen samalla radalla



A tekee jarrutuspolton

$$\Delta v = v_1 - v = \sqrt{\frac{GM}{R}} - \sqrt{GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)}$$

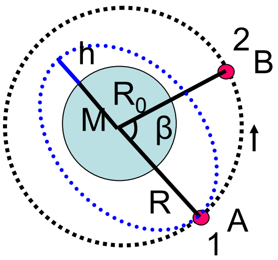
A:n uuden radan iso puoliakseli a on:

$$a = R \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{360n - \beta}{360n}\right)^2}$$

jossa n on pienin kokonaisluku, jolla toteutuu ehto **2a > R_0+R+h**, jossa h = 100 km minikorkeus.

Kohtaaminen tapahtuu ajan $t = n \cdot 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$ kuluttua.

Laskuesimerkki kohtaamisesta



Olkoon R_0=6378 km ja R=6678 km (300 km korkeudella ekvaattorista) Olkoon etumatka β = 30º.

A jarruttaa ja pääsee alemmalle radalle, jonka iso puoliakseli a on:

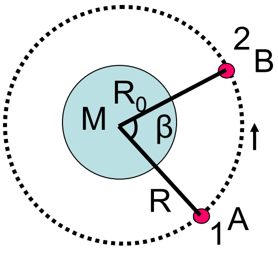
$$a = R \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{360n - \beta}{360n}\right)^2}$$

Yksi kierros n=1 antaa a=6302 km, mutta h=2a-R_0-R= -452 km. Vasta n= 4 antaa a=6585 km, jolloin h=114 km sopiva minimi.

$$\text{Lentoaika} \quad t = 4 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{(6585000\text{m})^3}{GM}} \approx 21271 \text{ s} \approx 5 \text{ h } 54 \text{ min } 30\text{s}$$

$$\text{A:n jarrutus } \Delta v = v_1 - v = \sqrt{\frac{GM}{R}} - \sqrt{GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)} \approx 54,75 \text{ m/s}$$

Kohtaaminen:Edellä oleva jarruttaa



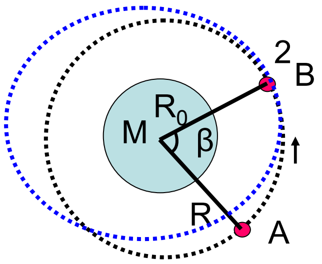
Alukset A ja B kiertävät etäisyydellä R Maapallon keskipisteestä. Maan säde on R_0 ja massa M.

Millä keinoin A saa B kiinni?

Edellä tarkasteltiin tilannetta, että **A:n jarruttaa** ja siirtyy alemmalle radalle, jonka kiertoaika on lyhyempi Kohtaaminen on tapahtuu **kohdassa 1**.

Toinen ratkaisu on, että **edellä oleva B kiihdyttää**. Tällöin B siirtyy **ylemmälle hitaammalle** radalla. Kohtaaminen voi tapahtua vain **kohdassa 2**, joka on ratojen leikkauspiste. Minikorkeusvaatimusta ei tarvita, koska rata on korkeampi.

Kohtaaminen:Edellä oleva jarruttaa



Alkuperäinen rata:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

B **kiihdyttää** ja siirtyy ylemmälle radalle, jonka iso puoliakseli olkoon **a**. tällöin A:n uusi kiertoaika **T** on:

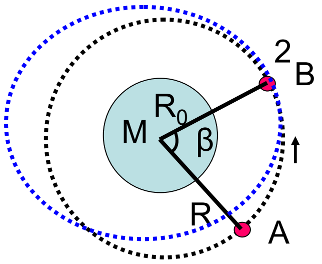
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

B lentää yhden kierroksen ja A kierros+β:

$$\underbrace{2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}}_{\text{B:n lentoaika}} = \frac{360+\beta}{360}\cdot \underbrace{2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}}_{\text{A:n lentoaika}}$$

Ratkaistaan a

Kohtaaminen:Edellä oleva jarruttaa



B:n uuden laajemman radan isoksi puoliakseliksi a saadaan:

$$a = R\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{360+\beta}{360}\right)^2}$$

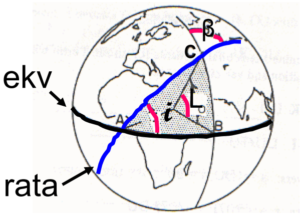
Esimerkki: R=6678 km, etumatka β=30º. Tällöin **a= 7044 km**.
B lensi uudella radalla yhden kierroksen ja A kierroksen+β.

$$\text{Lentoaika} \quad t = 2\pi\sqrt{\frac{(7044000\text{m})^3}{GM}} \approx 5884\ \text{s} \approx 98\,\text{min}$$

$$\text{B:n kiihdytys } \Delta v = v - v_1 = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R}-\frac{1}{a}\right)} - \sqrt{\frac{GM}{R}} \approx 198\ \text{m/s}$$

Inklinaatio määrää ratatason

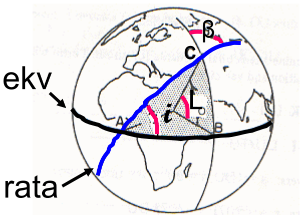
Satelliitin radan inklinaatio *i* tarkoittaa **päiväntasaajan** ja **satelliitin ratatason** välistä kulmaa.



C = Lähetyspaikka
β = lähetyssuunta (atsimuutti)
L = lähetyspaikan leveyspiiri
i = inklinaatio

Ongelmia tulee siitä, että inklinaatio ei voi olla alempi kuin lähetyspaikan leveyspiirin asteluku. Näin ollen Baikonourista ei voi lähettää alle 46º inklinaation satelliitteja, Plesetskistä alle 62º eikä Floridasta alle 28º. Geosynkronisen satelliitin inklinaatio on 0º, jolloin suora laukaisu onnistuu vain päiväntasaajalta. Miksi näin? Miksi ei muualta?

Miksi ekvaattori on hyvä laukaisuun?



Pallokolmioiden trigonometriasta voidaan johtaa seuraava yhteys:

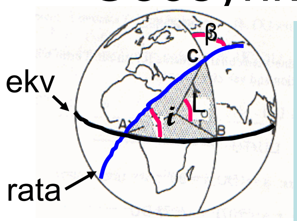
$$\cos i = \sin\beta \cdot \cos L$$

Etsitään laukaisupaikan minimi-inklinaatio. Se saadaan kun cos *i* on maksimissaan. Tällöin laukaisusuunta β = 90º, jolloin cos *i* = cos L ja siis ***i* = L**.

Laukaisupaikan antama **minimi-inklinaatio** on siis sama kuin **laukaisupaikan leveyspiiri**. Tällöin laukaisusuunta on kohtisuorassa meridiaania vastaan, siis lännestä itään.

Geosynkroniseen satelliitin **suora** laukaisu onnistuu siis vain **päiväntasaajalta**. Sea Launch-lautta ja Kourou ovat hyviä.

Geosynkronirata ja polaarirata

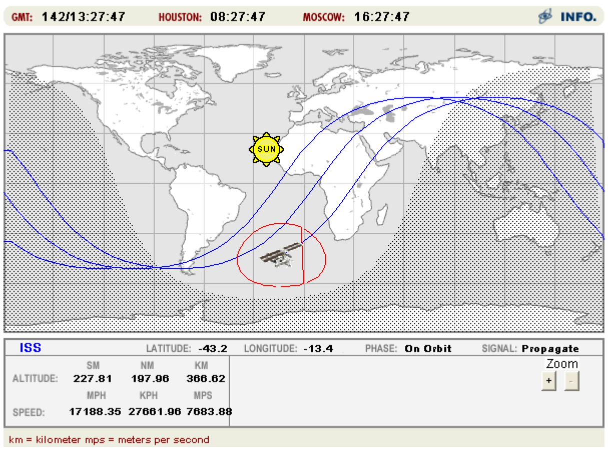


Inklinaatio kertoo myös leveyspiirin, jonka zeniittiin satelliitti voi nousta.
Jos i=0º, satelliitti kiertää päiväntasaajalla.
Jos i=90º, rata kulkee napojen kautta.
Jos i=65º, rata kulkee Oulun zeniitin yli.

Jatkuvasti saman paikan yläpuolella olevan satelliitin kiertoaika on sama kuin Maapallon pyörähdysaika, siis 23 h 56 min 4 s. Satelliitin on oltava päiväntasaajan yläpuolella noin 35 790 km korkeudella Maan pinnasta. Tietoliikenne- ja TV-satelliitit ovat tällaisia.

Napojen kautta kulkevan satelliitin inklinaatio = 90º. Rata voi olla kaikkien Maapallon paikkojen yläpuolella. Erinomainen valinta tiedustelu- ja luonnonvarasatelliitille!

Satelliitin radan projektio



Osoitteesta http://spaceflight.nasa.gov/realdata/tracking/
ISS:n rata 21.5.2004 klo 16.27 Suomen aikaa. Koska ISS kulkee noin 50-leveyspiirille asti, inklinaatio on noin 50º.

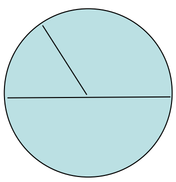
Satelliitin rata ja Maan pyörähdysaika

Satelliitin ratataso säilyttää suuntansa, koska impulssimomenttivektori pysyy vakiona. Maapallo pyörii satelliitin alla noin 15º tunnissa. Jos kierrosaika on 1,5 tuntia, seuraavalla kierroksella Maa on pyörähtänyt 1,5·15º=22,5º.

Jos Maapallon pyörähdysaika 24 h 56 min 4 s on satelliitin kiertoajan monikerta, satelliitti tulee joka päivä samaan aikaan saman paikkakunnan yläpuolelle.

GPS-satelliittit, 27 kpl, kiertävät Maapallon kahdesti vuorokaudessa. Tästä aiheutuu kuitenkin resonanssiongelmia, jotka häiritsevät satelliittien ratoja. Tältä kannalta katsoen GPS-satelliittien radat on valittu huolimattomasti.
EU:n **Galileossa** näin ei pääse tapahtumaan. Myöskään Venäjän **GLONASS**illa ei ole resonanssiongelmia.

Esim. Satelliitin inklinaatio on 90º ja kierrosaika 1,5h
Se on Oulun yläpuolella (65º01'N,25º32'E) klo 15.
Missä satelliitti on klo 17.30 samana päivänä?



Satelliitti on kiertänyt yhden kierroksen, joten se on leveyspiirin 65º01' yläpuolella. Maapallo on pyörähtänyt 1,5 h·15º/h = 22,5º=22º30' itään, joten zeniitti on siirtynyt länteen.

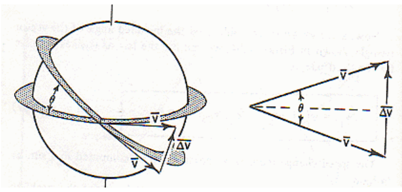
Satelliitin leveyspiiri = 65º01' N
Satelliitin pituuspiiri = 25º32' - 22º30' = 03º02' E

Satelliitti on siis Norjanmeren yläpuolella

Seuraavana päivän klo 15 satelliitti on taas likipitäen Oulun yläpuolella, koska 24h/1,5 h = 16

Satelliitin ratatason vaihto kallista

Erityisesti Venäjän kannalta on hankalaa, että lähetysasemat Baikonour ja Plesetsk sijaitsevat korkeilla leveyspiireillä. Jos niistä halutaan lähettää satelliitti geosynkroniselle radalle, inklinaatio on muutettava nollaksi ratatasoa vastaan kohtisuoralla impulssilla. Se on huomattavan kallista.



Ratanopeus pidetään samana v, suuntaa muutetaan, jolloin saadaan

$$\Delta v = 2v \cdot \sin\frac{\theta}{2}$$

Esim. jos ratatasoa muutetaan 60º, nopeuden muutos on yhtä suuri kuin ratanopeus v. Siis pelkkä ratatason korjaus vaatii yhtä paljon kuin radalle nostaminen! Baikonourista (L=46º) lähetetyn ratatason “oikaisu” vaatii 0,78v:n impulssin.

Intelsat Proton-M-kantoraketilla

17.6.2004 laukaistiin Baikonourista siihen asti maailman suurin tietoliikennesatelliitti **Intelsat 10-02**, massaltaan 5580 kg. Kantorakettina oli Proton-M varustettuna neljännen vaiheen ”kiihdytysblokilla” Breeze-M. Lähdön jälkeen Breeze-M ja siihen kiinnitetty Intelsal asettuivat aluksi ”pysäköintiradalle” noin 170 km korkeuteen. Radan inklinaatio oli 51,5 astetta.

Breeze-M teki 4 ratakorjausta, joka muuttivat inklinaation 23,6 asteeseen ja radan alimman kohdan noin 4000 km korkeuteen ja ylimmän kohdan noin 35600 km korkeuteen.
9 tuntia 10 minuutin kuluttua lähdöstä Breeze-M oli tehnyt tehtävänsä ja se irrotettiin satelliitista.
Intelsat 10-02:n omat rakettimoottorit vievät myöhemmin satelliitin geosynkroniselle radalle.
Intelsat aloitti toimintansa elokuussa 2004 ja jatkaa 13 vuotta.

Pakonopeus Maasta

Yleisesti ottaen Maan pinnalta tai kiertoradalta luotain lähtee poistumisradalle (hyperbeli- tai parabelirata), jos sen nopeus Maan suhteen on noin 11,2 km/s.
Miten tämä lasketaan? **Energiaperiaatteella**

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0} = \cancel{\frac{v_\infty^2}{2}} - \cancel{\frac{GM}{r_\infty}}$$

r_∞ = kaukana Maasta
$v_\infty \approx 0$ (paraabeli)
v_0 = vaadittu lähtönopeus
r_0 = aluksen etäisyys massakeskuksesta

Tarvittava nopeus v_0 , kun
alus on etäisyydellä r_0 massakeskuksesta

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = v_{ympyrä} \cdot \sqrt{2}$$

alus "juuri ja juuri" poistuu Maan vaikutuspiiristä (paraabelirata)

Pakonopeuksia Maan läheltä

Maan pinnalta, kun r_0 = 6378 km (päiväntasaajalla)

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \qquad v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}986004415 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3 s^{-2}}}{6378\ 000\ \mathrm{m}}}$$

$$\approx 11180\ \mathrm{m/s} \approx 11{,}2\ \mathrm{km/s}$$

Kiertoradalta r_0 = 6378 km + 300 km = 6678 km

v_0 = 10926 m/s ≈ **10,9 km/s**
(radalla on jo nopeutta 7726 m/s, joten lisänopeus 3200 m/s)

Kiertoradalta r_0 = 6378 km + 1000 km = 7378 km

v_0 = 10395 m/s ≈ **10,4 km/s**

r_0 = 200 000 km, jolloin v_0 ≈ **1996 m/s**

Pakonopeus Deimoksen pinnalta

Marsin pienempi kuu Deimos kiertää noin 23 430 km etäisyydellä Marsista. Halkaisijaltaan noin 15 km kokoisen kuun massa on 1,8·10^{15} kg. Millä nopeudella astronautti Haemaelaeisen pitää heittää moukari, jotta se poistuisi Deimoksesta?

$$\text{Pakonopeus } v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}6726\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}\cdot 1{,}8\cdot 10^{15}\,\text{kg}}{7490\ \text{m}}} \approx 5{,}7\ \text{m/s}$$

Kun kivi poistuu Deimoksen vaikutuspiiristä, se jää kiertämään Marsia suunnilleen samalla radalla kuin Deimos, kiertoaika noin 1 vrk 6 h.

Maan pinnalta Pluton taakse

Alus on saatu pois Maasta, jolloin se on Auringon vetovoiman alaisena. Pakonopeus Auringon vaikutuspiiristä on

$$v_{pois} = \sqrt{\frac{2GM_{Aurinko}}{r}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}32712440018\cdot 10^{20}\,\text{m}^3\text{s}^{-2}}{1{,}496\cdot 10^{11}\text{m}}} \approx 42122\ \text{m/s}$$

Maan ratanopeus on 29784 m/s, joten lisänopeus on näiden erotus 42122 m/s – 29785 m/s = **12337 m/s**

Alus on tätä ennen saatava ulos Maasta. Lähtönopeus v_0

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0} = \frac{v_{pois}^2}{2} - \cancel{\frac{GM}{r_{maa}}}$$

mitätön

$$\text{Sijoitus } v^2_{poisMaasta} = \frac{2GM}{r_0} \approx (11{,}18\ \text{km/s})^2$$

$$v_0 = \sqrt{v^2_{pois} + v^2_{poisMaasta}} = \sqrt{(12{,}337\ \text{km/s})^2 + (11{,}18\ \text{km/s})^2} \approx 16{,}65\ \text{km/s}$$

Aurinkoon pääsy vaikeampaa kuin Plutoon

Toisinaan esitetään, että ydinjätteitä voitaisiin lähettää Aurinkoon. Lasketaan, millainen lähtönopeus tarvittaisiin, jos lennetään suoraan Maan pinnalta Aurinkoon.

Ensin pois Maan pinnalta $\mathbf{v_{poisMaasta}}$ **=11,18 km/s**

Nyt on vasta päästy pois Maasta, mutta nopeus Auringon on sama kuin Maan ratanopeus $\mathbf{v_{Maa}}$ **= 29,784 km/s**. Tämä nopeus on nollattava, jotta pudottaisiin Aurinkoon

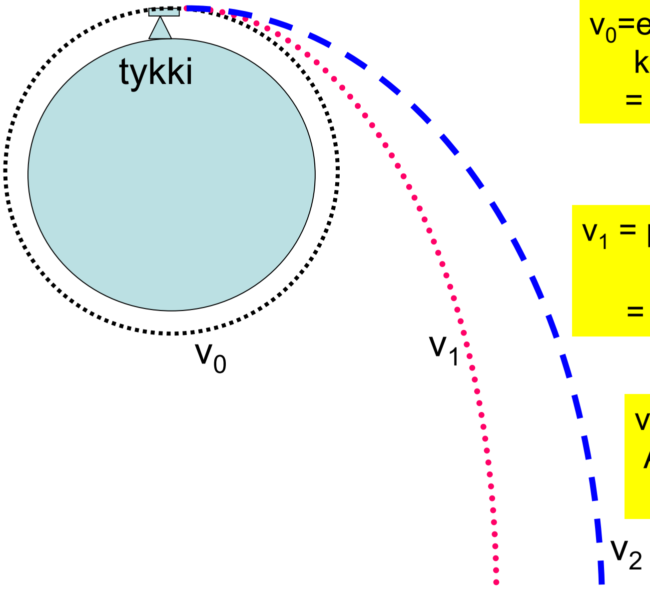
Kuinka suuri on siis raketin lähtönopeus v_0 Maasta ?

Energian säilymislaista seuraa kuten edellä

$$v_0 = \sqrt{v_{Maa}^2 + v_{poisMaasta}^2} = \sqrt{(29,784\ \mathrm{km/s})^2 + (11,18\ \mathrm{km/s})^2} \approx 31,8\ \mathrm{km/s}$$

Kemiallisilla raketeilla tämä on mahdotonta. On helpompaa lentää ulos Aurinkokunnasta kuin päästä Aurinkoon!

Yhteenveto: pakonopeudet Maan pinnalta



v_0=ensimmäinen kosminen nopeus = 7,91 km/s

v_1 = pakonopeus Maan vaikutuspiiristä = 11,2 km/s

v_2 = pakonopeus Aurinkokunnasta = 16,7 km/s

Pitääkö aina olla pakonopeus, jotta päästäisiin ulos Maasta?

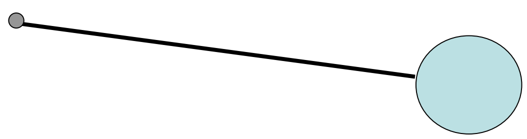
Edellä oletettiin, että lähtö on joko tykinlaukaus tai lyhyt ja nopea rakettikiihdytys. Tällöin tarvittavat loppunopeudet ovat laskettuja pakonopeuksia

Ulos Maasta päästään kyllä hitaasti nousemalla. Raketilla tämä on erittäin epäedullinen keino. **Lyhyt ja nopea kiihdytys** on paras ulospääsykeino.

Konstantin Tsiolkovski ehdotti 1895 avaruushissiä, jolla alus nostettaisiin kiertoradalle. Hissi olisi 36 000 km korkea torni. Idean Tsiolkovski sai nähdessään Eiffelin tornin.

Moderni ehdotus avaruushissiksi

Käytetään nanoputkista (fullereenia) rakennettua vaijeria, jonka toisessa päässä on vastapaino toisen pään ollessa Maan pinnalla. Systeemin painopiste on geosynkronisen radan kohdalla



Teoriassa vaijerihissi toimisi ja olisi energeettisesti edullinen. Voidaanko tarvittavan lujaa fullereenia valmistaa? Joidenkin laskelmien mukaan tarvitaan yli 100 GPa lujuus. Toistaiseksi nykyiset nanoputket ovat lujuudeltaan 63 GPa. Teoreettinen yläraja nanoputkien lujuudelle lienee 300 Gpa, mikä riittäisi avaruushissin vaijeriin.

Kiertoradalta tarvittavat lisänopeudet

Alus kannattaa ensin nostaa kantoraketilla kiertoradalle, ns **LEO**-radalle = Low Earth Orbit. Siellä annetaan lisävauhtia, jolla alus saadaan poistumaan Maan vaikutuspiiristä. Energian kannalta tämä edullisempaa kuin suora lento Maasta.

300 km korkeudella r_0 = 6378 km + 300 km = 6678 km

$$\text{Ympyräradalla nopeus on } v_{ymp} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \approx 7726 \text{ m/s}$$

$$\text{Pako ympyräradalta } v_{pois} = v_{ymp} \cdot \sqrt{2} \approx 10926 \text{ m/s}$$

Vaadittava **lisänopeus** on 10926 m/s – 7726 m/s ≈ **3200 m/s** (lisävauhti 300 km ympyräradan tangentin suuntaan)

Tällöin alus saadaan poistumaan Maan vaikutuspiiristä.

Planeetan vaikutuspiiri

Planeetan lähellä Auringon vetovoima voidaan jättää huomiotta. Planeettainvälisessä avaruudessa alus on Auringon vaikutuksessa, jolloin planeettojen vetovoima voidaan jättää huomiotta. Vaikutuspiirin rajalla **potentiaalienergia suhteessa planeettaan mitätöityy.** Laplace johti häiriölaskun avulla vaikutuspiirin lausekkeen.

Laplacen kaava **Kuun** vaikutuspiirille suhteessa Maahan:

$$R_S = \text{Kuun ja Maan välimatka} \cdot \left(\frac{\text{Kuun massa}}{\text{Maan massa}}\right)^{2/5} \approx 66\ 300 \text{ km}$$

Vastaavasti **Maan** vaikutuspiiri suhteessa Aurinkoon

$$R_{Maa} = \text{Auringon ja Maan välimatka} \cdot \left(\frac{\text{Maan massa}}{\text{Auringon massa}}\right)^{2/5} \approx 925\ 000 \text{ km}$$

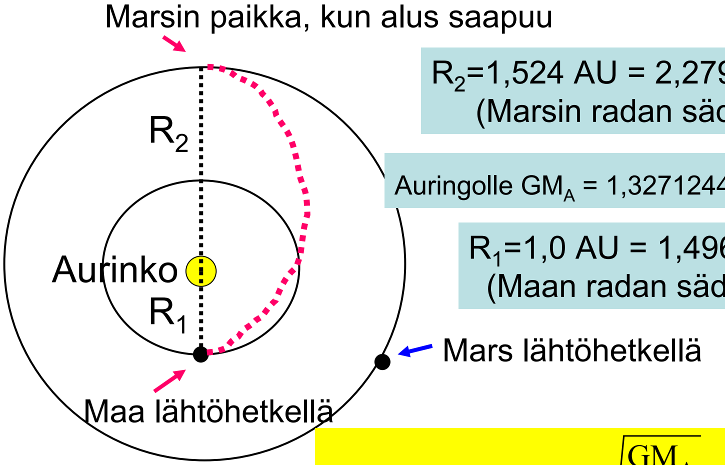
Marsin vaikutuspiiriksi saadaan noin 580 000 km

Maasta Marsiin, Venukseen

Hohmannin siirtoellipsin avulla voidaan siirtää luotain maatakiertävältä radalta Marsia tai Venusta kiertävälle radalle. Hohmannin puoliellipsirata vaatii vähiten energiaa, mutta lentomatka ja lentoaika on pitkä.
Lennolla on neljä vaihetta:
1) Alus nostetaan Maan kiertoradalle.
2) Alus saadaan ulos Maan vaikutuspiiristä.
3) Alus lentää Auringon painovoiman alaisena elliptistä rataa pitkin Marsin vaikutuspiiriin.
4) Marsin lähellä alukselle annetaan Marsin suhteen jarrutus, jolloin alus jää kiertämään Marsia tai lähtee laskeutumaan Marsiin.

Seuraavassa yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan kaikki kiertoradat ympyröiksi, jolloin ainoastaan siirtorata Maasta Marsiin on elliptinen. Lisäksi Maan ja Marsin ratojen oletetaan olevan samassa tasossa.
Ei riitä, että päästään Marsin radalle. Marsin pitää vielä olla radallaan siirtoellipsin loppupäässä, kun avaruusalus saapuu sinne. Tämä vaatii oikeata ”laukaisuikkunaa” eli laukaisuhetkeä.
Seuraavassa lasketaan lisänopeus, jonka **Maan vaikutuspiiristä ulos päässyt alus** tarvitsisi päästäkseen Marsiin vievälle siirtymäellipsiradalle. Sen jälkeen lasketaan ympyräradalla tarvittava lisänopeus (lähtöpoltto).

Lento Maasta Marsiin



R_2=1,524 AU = 2,2799·10^{11} m
(Marsin radan säde)

Auringolle GM_A = 1,32712440018·10^{20} m^{3}s^{-2}

R_1=1,0 AU = 1,496·10^{11} m
(Maan radan säde)

Maan ratanopeus $v_1 = \sqrt{\frac{GM_A}{R_1}} = 29784$ m/s
(Auringon suhteen)

Lento Maasta Marsin vaikutuspiiriin

Siirtoellipsin $a = (R_1+R_2)/2 = 1{,}888 \cdot 10^{11}$ m
Ellipsiradalla ollaan Auringon vaikutuspiirissä

Lähtönopeus (ulkona Maasta) $v_A = \sqrt{GM_{Aur}\left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a}\right)} = 32731$ m/s
(Auringon suhteen)

Tarvittava nopeuden lisäys Maan suhteen
$v_A - v_1 = 32731$ m/s - 29784 m/s = **2947 m/s**

Maan ratanopeus

Tämä vie Marsin vaikutusalueeseen. Siellä alus alkaa pudota kohti Marsin painovoimakenttää. Jos ei tehdä jarrutuksia, alus koukkaa Marsin ja poistuu Marsin vaikutuspiiristä.

Lento Maasta Marsin vaikutuspiiriin: lentoaika

Hohmannin siirtoellipsin puoliskoa pitkin kuluu aikaa

$$T = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

= 22 370 000 s ≈ **258 vrk 22 h**
(noin 8 kk 20 vrk)

siirtymäellipsin iso puoliakseli $a = 1{,}888 \cdot 10^{11}$ m
Auringolle $GM = 1{,}32712440018 \cdot 10^{20}\ m^3 s^{-2}$

Käytännössä otetaan huomioon Maan ja Marsin ratojen elliptisyys ja valitaan oikeat ”lähtöikkunat”
Esimerkiksi kesällä 2004 oli erinomaiset lähtöajat

Lento Maasta Marsiin: lähtöikkuna

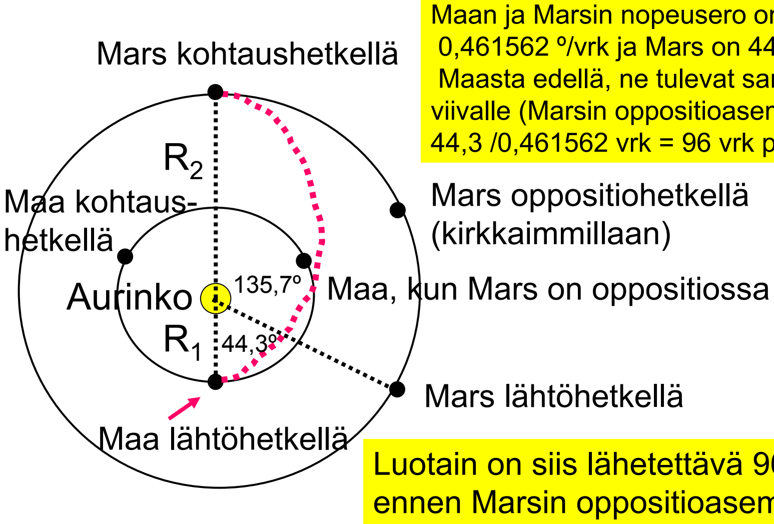
Lentoaika on siis 22 370 000 s = 258,912 vrk
Maan vuosi on 365,2422 vrk ja Marsin vuosi on 686,911 vrk
Maan ratanopeus 360/365,2422 º/vrk = 0,985647 º/vrk
Marsin ratanopeus 360/686,911 º/vrk = 0,524085 º/vrk
Nopeusero 0,461562 º/vrk

Mars kulkee luotaimen lentoaikana 0,524085·258,912º=135,7º
Mars on siis lähtöhetkellä 135,7º ennen kohtaamispaikkaa.
(Lähdössä luotain perihelissä, kohdatessa aphelissä)

Maa on lähtöhetkellä luotaimen perihelissä 180º päässä luotaimen ja Marsin kohtaamispaikasta (luotaimen aphelista).

Luotaimen ja Marsin kohdatessa Maa on ehtinyt kulkea 0,985647·258,912º=255,2º. Maa on mennyt 75,2º aphelin ohi.

Lento Maasta Marsiin: lähtöikkuna



Maan ja Marsin nopeusero on 0,461562 º/vrk ja Mars on 44,3º Maasta edellä, ne tulevat samalle viivalle (Marsin oppositioasema) 44,3 /0,461562 vrk = 96 vrk päästä

Luotain on siis lähetettävä 96 vrk ennen Marsin oppositioaseman päivää.

Lento Marsiin Maan kiertoradalta

Edellä saimme tulokseksi, että Maan vaikutuspiiristä poistuneen avaruusaluksen nopeuden on oltava 2946 m/s, Maan suhteen, jotta se pääsisi Marsin vaikutuspiiriin.
Sitä ennen alus saatava Maata kiertävältä radalta ”ulos” Maan vaikutuspiiristä, jonka voidaan arvioida ulottuvan lähes 1000 000 km päähän. Tuolla miljoonan kilometrin päässä aluksen nopeuden pitää olla 2947 m/s Maapallon suhteen ja 29 784 m/s + 2947 m/s = 32731 m/s Auringon suhteen

Alus kiertää 300 km korkeudella nopeudella 7726 m/s. Mikä lisänopeus alukselle on annettava kiertoradalla, jotta se poistuu Maasta ja lähtee Maan vaikutuspiirin reunalla miljoonan kilometrin päässä nopeudella 2947 m/s Maan suhteen kohti Marsia?

Lento Marsiin Maan kiertoradalta

Vapaalla lennolla, Keplerin liikkeessä, moottori ei ole päällä eikä ilmanvastus vaikuta. Tällöin aluksen kokonaisenergia säilyy

kineettinen potentiaali

$$\frac{v_{300}^{2}}{2} - \frac{GM}{r_{300}} = \frac{v_{\infty}^{2}}{2} - \frac{GM}{r_{\infty}}$$

v_{300} = alkunopeus radalla
v_{∞} = nopeus Maan vaikutuspiirin rajalla
M = Maapallon massa
r_{300} = kiertorataetäisyys
r_{∞} = vaikutuspiirin

$\frac{GM}{r_{\infty}}$ on olemattoman pieni muihin verrattuna

$$v_{300} \approx \sqrt{v_{\infty}^{2} + \frac{2GM}{r_{300}}}$$

Pakonopeus kiertoradalta

Hohmannin siirtoellipsin lähtönopeus 2947 m/s Maan suhteen

Lento Marsiin 300 km korkeudelta maatakiertävältä radalta

Kiertoradalla tarvittava lähtönopeus v_0

$$v_{300} \approx \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2GM_{Maa}}{r_{300}}} = \sqrt{v_\infty^2 + v_{poisKiertoradalta}^2}$$

vie Marsiin 2947 m/s

300 km kiertoradalta pois, 10926 m/s

$$v_{300} = \sqrt{(2947\ \text{m/s})^2 + (10926\ \text{m/s})^2} = 11316\ \text{m/s}$$

Oikea lisänopeus radalla = 11316 m/s – 7726 m/s = **3590 m/s**

Saapuminen Marsin vaikutuspiirin ja jarrutus

Alus tulee Marsin vaikutuspiirin Hohmannin siirtoellipsirataa pitkin, jolla siirron vaatima energiankulutus on pienempi kuin muilla radoilla, mutta lentoaika on pitkä

$$\text{Tulonopeus on } v = \sqrt{GM_{Aur}\left(\frac{2}{R_{Mars}} - \frac{1}{a}\right)} = 21478\ \text{m/s}$$

GM_{Aur} = 1,32712440018·10^{20} m^{3}s^{-2}

R_{Mars} =Marsin etäisyys Auringosta = 1,524 AU = 2,2799·10^{11} m

a = siirtoellipsin iso puoliakseli = 1,888·10^{11} m

$$\text{Marsin ratanopeus } v_{Mars} = \sqrt{\frac{GM_{Aur}}{R_{Mars}}} \approx 24127\ \text{m/s}$$

Erotus

Aluksen ja Marsin välinen suhteellinen nopeus on **2649 m/s**

Saapuminen Marsin vaikutuspiirin ja jarrutus, jotta päästää 1000 km radalle

Marsilla on siis 2649 m/s suurempi ratanopeus kuin saapuvalla aluksella. Tarvitaan siis jarrutuspoltto, jotta alus saadaan Marsin kiertoradalle. Muuten Mars tulee päälle tai karkaa. Lasketaan aluksen tulonopeus 1000 km korkeudelle ja vaadittava ympyräratanopeus 1000 km korkeudella.
Erotus on tarvittava jarrutus.

Marsin $GM_{Mars} = 4{,}28282 \cdot 10^{13}\ m^3s^{-2}$, säde $r_0 = 3380$ km

1000 km ympyräradalla $v_{ymp} = \sqrt{\frac{GM_{Mars}}{r_{1000}}} \approx 3127$ m/s, pakonopeus $v_{pois1000} = 3127 \cdot \sqrt{2}$ m/s ≈ 4422 m/s

Aluksen nopeuden pitää siis olla 1000 km korkeudella välillä 3127 m/s – 4422 m/s, jotta se jäisi Marsia kiertävälle ympyrä tai ellipsiradalle, jonka alin kohta on 1000 km pinnasta. Nopeudella > 4422 m/s alus poistuu Marsin vaikutuspiiristä.

Jarrutus Marsin 1000 km kiertoradalla

Tulonopeus saavuttaessa Marsin vaikutuspiiriin $v_{tulo} = 2649$ m/s
$r_{1000} = 4380$ km. Energia säilyy, joten aluksen vauhti kasvaa.

$$\frac{v_{1000}^2}{2} - \frac{GM_{Mars}}{r_{1000}} = \frac{v_{tulo}^2}{2} - \cancel{\frac{GM_{Mars}}{r_{tulo}}}$$

mitätöityy

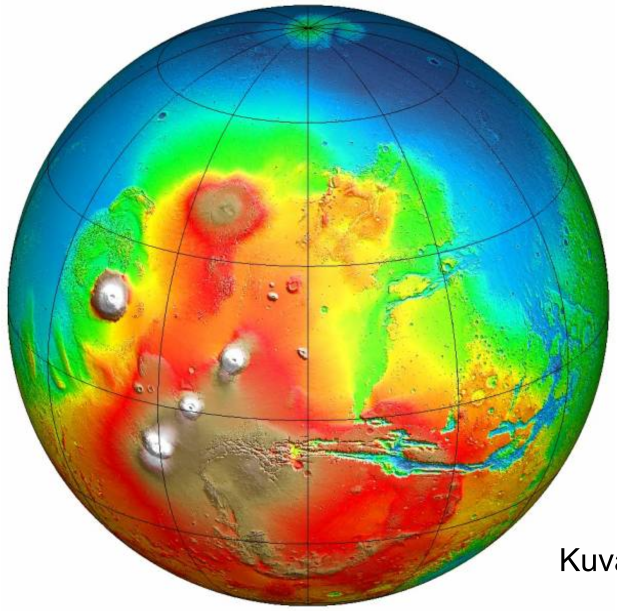
Ratkaistaan tästä nopeus 1000 km korkeudella v_{1000}

$$v_{1000} = \sqrt{v_{tulo}^2 + \frac{2GM_{Mars}}{r_{1000}}} = \sqrt{(2649\ \text{m/s})^2 + \frac{2 \cdot 4{,}2828 \cdot 10^{13}\ \text{m}^3\text{s}^{-2}}{4380\ 000\ \text{m}}} \approx 5155\ \text{m/s}$$

Toisaalta ympyräratanopeus on 3127 m/s → **jarrutus 2028 m/s**

Nopeuden pitää olla alle pakonopeuden 4422 m/s, jotta alus jäisi Marsin kiertoradalle.

TUNNETUIN TÖPPÄYS MITTAYKSIKÖISSÄ



Kuva: NASA

TUNNETUIN TÖPPÄYS MITTAYKSIKÖISSÄ

1999 NASA:n Mars Climate Orbiter-luotaimen piti asettua kiertämään Marsia.

NASA tilasi jarrutuslaskelman Lockheed-yhtymältä

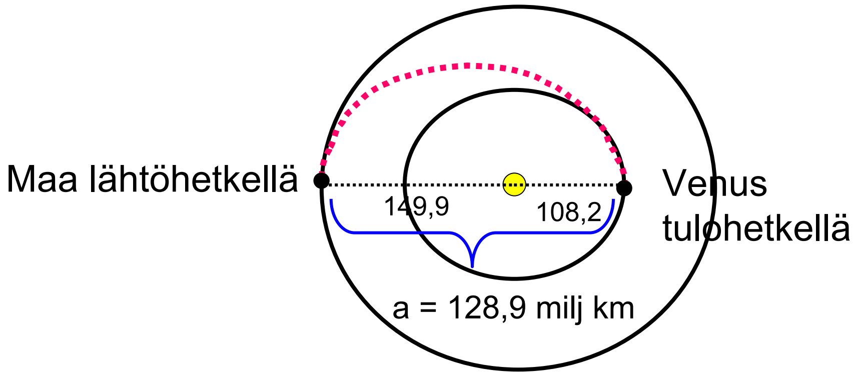
Lockheedin kesäharjoittelija-ohjelmoija laski tarvittavat luvut amerikkalaisissa yksiköissä, siis tuumissa, nauloissa, paunoissa, jaloissa, maileissa...

Ja ilmoitti luvut NASA:lle kertomatta yksiköitä

NASA oletti ilman muuta yksiköiden olevan SI:n mukaisia siis metri-ja kilogramma-yksiköitä. 2 paunaa vastaa 1 kg, jarrutuspoltto oli liian suuri…

Kallis luotain rysähti Marsin pintaan...

Lento Maasta Venukseen



Mentäessä ”sisäplaneetoille” Venukseen ja Merkuriukseen Maasta poistuvan aluksen nopeuden pitää olla **pienempi** kuin Maan ratanopeus. Lähetys-polton pitää siis suuntautua **Maan rataa vastaan**.

Lento Venukseen 300 km maatakiertävältä radalta

Venuksen radan säde r_{venus} =108,2 miljoonaa km
Maan radan säde r_{Maa} = 149,6 miljoonaa km
Siirtymisellipsin a =(149,6+108,2)/2 = 128,9 miljoonaa km

1) Millainen poltto Maata kiertävällä radalla, jotta alus lähtee Venukseen vievälle minimiellipsiradalle?

Lähtönopeus (ulkona Maasta) $v_A = \sqrt{GM_{Aur}\left(\frac{2}{R_{Maa}} - \frac{1}{a}\right)} = 27288$ m/s
(Auringon suhteen)

Maapallon ratanopeus v_{Maa} = 29784 m/s

Lähtönopeus Maapallon suhteen, kun ollaan Maan vaikutuspiirin reunalla v_∞ = 29784 m/s – 27288 m/s = **2496 m/s**

Lähtö Venukseen

Tarvittava lähtönopeus maatakiertävällä radalla,
kun poistumisnopeus Maan vaikutuspiiristä on 10926 m/s
ja kiertoratanopeus on 7726 m/s

$$v_A = \sqrt{v_\infty^2 + v_{300pois}^2} = \sqrt{(2496 \text{ m/s})^2 + (10926 \text{ m/s})^2} \approx 11207 \text{ m/s}$$

Nopeuden lisäys = lähtönopeus – kiertoratanopeus
= 11207 m/s – 7726 m/s = **3481 m/s**

Nyt alus poistuu Maapallon vaikutuspiiristä ja lentää Auringon vaikutuspiirin alaisena Venuksen vaikutuspiiriin Hohmannin minimiellipsirataa pitkin.

Tulo Venuksen vaikutuspiiriin, jarrutus, jotta päästään 1000 km kiertoradalle

$$\text{Tulonopeus Venuksen vaikutuspiiriin } v = \sqrt{GM_{Aur}\left(\frac{2}{r_{Venus}} - \frac{1}{a}\right)} \approx 37730 \text{ m/s}$$

$$\text{Venuksen ratanopeus} = \sqrt{\frac{GM_{Aur}}{r_A}} \approx 35022 \text{ m/s}$$

Tulonopeus Venuksen vaikutuspiiriin Venuksen suhteen on erotus 37730 m/s – 35022 m/s = **2708 m/s**

Nyt alus putoaa Venuksen painovoimakentässä 1000 km kiertoradalle asti. Tarvittava jarrutuspoltto on on tulonopeuden ja vaaditun kiertoratanopeuden erotus

Jarrutus, jotta päästään 1000 km Venusta kiertävälle ympyräradalle

Energia säilyy, joten voimme laskea nopeuden joka alus saa pudotessaan 1000 km korkeudelle:

$$\frac{v_{1000}^{2}}{2} - \frac{GM_{Venus}}{r_{1000}} = \frac{v_{tulo}^{2}}{2} - \cancel{\frac{GM_{Venus}}{r_{tulo}}}$$

Mitätöityy

$$v_{1000} = \sqrt{v_{tulo}^{2} + \frac{2GM_{Venus}}{r_{1000}}} = \sqrt{(2708\ \mathrm{m/s})^{2} + \frac{2\cdot 3{,}24859\cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3 s^{-2}}}{7052\ 000\ \mathrm{m}}} \approx 9973\ \mathrm{m/s}$$

$$\text{Vaadittava ympyräratanopeus } v_{1000ymp} = \sqrt{\frac{GM_{Venus}}{r_{1000}}} \approx 6787\ \mathrm{m/s}$$

Jarrutustarve = 9973 m/s – 6787 m/s = **3186 m/s**

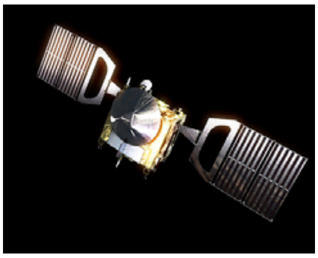
Lentoaika Venukseen

Saimme siis tulokseksi, että 300 km maatakiertävällä radalla alukselle on annettava 3481 m/s poltto. Venukseen tultaessa on annettava 3186 m/s jarrutuspoltto, jotta päästään 1000 km korkeudella Venuksen pinnasta olevalle ympyräradalle. (Edullisempaa on tosin tulla hyvin elliptiselle radalle.)

Lento Hohmannin siirtoellipsin puolikasta pitkin vie ajan T

$$T = \pi\sqrt{\frac{a^{3}}{GM_{Aur}}} = \pi\sqrt{\frac{(128{,}9\cdot 10^{9}\ \mathrm{m})^{3}}{1{,}32712440018\cdot 10^{20}\ \mathrm{m^3 s^{-2}}}} \approx 146\ \mathrm{vrk}$$

ESA:n Venus Express



Kuva: ESA

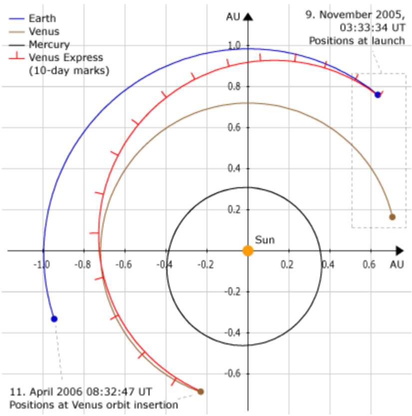
ESA:n ensimmäinen Venus-luotain, tutkimuskohteena:

- Venuksen kaasukehä
- Aurinkotuuli
- Miksi Venus on kuuma, 500 °C
- Miksi paine 90 bar
- Venuksen sääilmiöt

Luotaimen mukana on myös suomalaista teknologiaa

Venus Expess laukaistiin venäläisellä Sojuz-raketilla 9.11.2005. Venuksen luo se saapuu huhtikuussa 2006.

Venus Expressin rata



Kuva: ESA

Hohmannin siirtoellipsissa luotaimen ja Venuksen kohtaamispiste olisi juuri vastakkaisessa kohdassa.

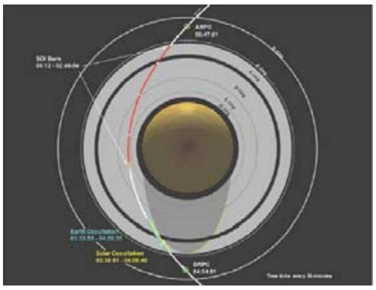
Luotain kohtaa Venuksen vähän myöhemmin.

Hohmannin aika olisi 146 vrk
Venus Express aika 152 vrk
(viimeisestä poltosta)

Venus Express asettuu ensin hyvin elliptiselle kiertoradalle: lähin kohta 250 km, kaukaisin kohta 220 000 km Venuksen pinnasta.

Cassinin jarrutus Saturnuksen luona

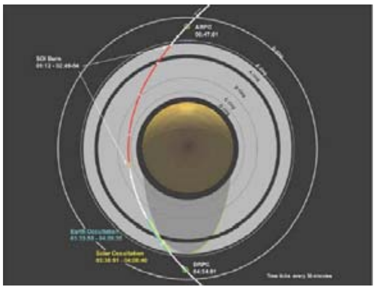
NASA:n ja ESA:n luotain Cassini/Huygens lähetettiin matkaan 15.10.1997. Se asettui 96 minuutin jarrutuspolton avulla Saturnusta kiertävälle radalle 1.7.2004. Lähimmillään Cassini oli 80 230 km päässä Saturnuksen keskipisteestä. Polton lopussa Cassini oli noin 80 752 km etäisyydellä ja lensi nopeudella 30 530 m/s Saturnuksen suhteen.



Ilman 626 m/s jarrutusta Cassinin nopeus olisi ollut 31 156 m/s, jolloin luotain olisi karannut Saturnuksen vaikutuspiiristä.

Mikä olisi miniminopeus 80752 km etäisyydellä, jotta luotaisi jäisi vielä kiertämään Saturnusta?

Cassinin jarrutus Saturnuksen luona



Saturnus GM=$3{,}7931187 \cdot 10^{16}$ m^3s^{-2}
R = 80752 km = 80 752 000 m

$$\text{Pakonopeus } v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 30650 \text{ m/s}$$

Jos nopeus olisi ollut suurempi kuin **pakonopeus 30650 m/s**, Cassini olisi karannut Saturnukselta. 626 m/s jarrutuksen ansiosta Cassinin nopeus oli **polton lopussa 30530 m/s**, mikä vei sen hyvin soikealle ellipsiradalle. Kiertoajaksi tuli 116,3 vrk. Uusi rata oli juuri se, mikä oli suunniteltu.
Menestys oli täydellinen. Kaikki toimi viimeisen päälle hyvin.

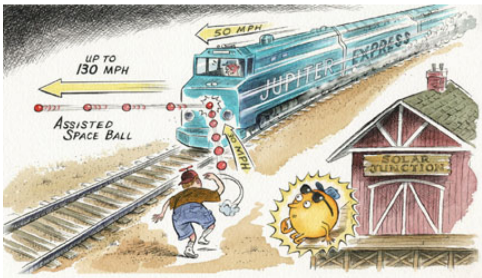
Energian ja impulssimomentin kaappaminen planeetalta

1960-luvulla eräs Nasassa kesätöissä oleva opiskelija huomasi, että planeetan ohi lentävä avaruusalus pystyy ottamaan vauhtia planeetasta: kaappaa sen impulssimomenttia ja energiaa. Planeetan kokemaa menetystä ei voi edes mitata, mutta luotaimen saama lisäpotku voi olla suuri. Toisin, kun yleisesti kuvitellaan, kyseessä ei ole linkoaminen

Voyager 1 lähetettin aluksi Hohmannin minimiellipsirataa kohti Jupiteria. Saavuttuaan Jupiterin vaikutuspiirin, luotain otti vauhtia Jupiterista samalla muuttaen suuntaansa kohti Saturnusta. Voyagerit ottivat lisävauhtia Saturnuksesta, Uranuksesta ja Neptunuksesta.

Miten lisäpotkun saaminen toimii

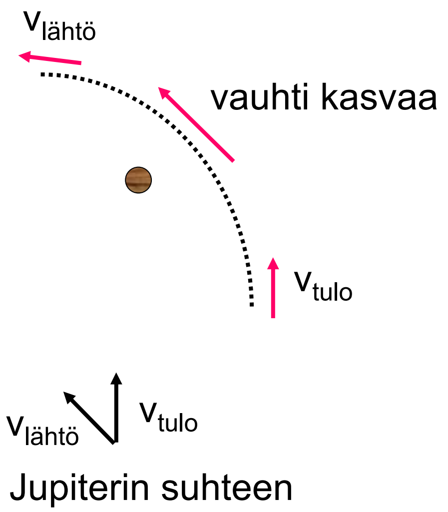
Vertaus: Pojanviikari heittää kovaa vauhtia tulevaa veturin nokkaa etuviistosta. Kivi törmää pienellä nopeudella veturiin, jolloin veturi heittää kiven suurella nopeudella toiseen suuntaan. Tässä kivi varastaa veturilta nopeutta suhteessa maahan ja poikaan.



Kuva: NASA / JPL:n

Myös junan perään heitetty kivi pääsisi junan ”imuun”.

Lisäpotkua Jupiterista

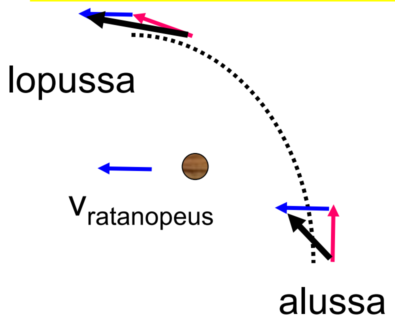


Tultaessa Jupiterin vaikutuspiiriin nopeus alkaa kasvaa ja suunta muuttua. Poistuttaessa nopeus alenee. Missä on pihvi? Mitä hyötyä tästä oli?

Suhteessa **Jupiteriin** alus ei saakaan potkua, mutta suhteessa **Aurinkoon** alus saa huomattavan ”potkun”. Miten?

Lisäpotku saadaan suhteessa Aurinkoon

Asian ydin on siinä, että **myös Jupiter liikkuu** nopeasti. Se ei ole paikallaan suhteessa Aurinkoon. Painovoimallaan Jupiter vetää alusta mukanaan ja näin siirtää sille osan ratanopeuttaan. Jupiterissa muutos on mitätön, mutta alukselle huomattava.

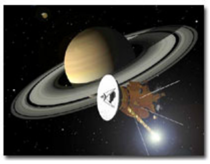


Musta nuoli kuvaa aluksen nopeutta suhteessa Aurinkoon. Jupiterista poistuttaessa nopeus on selvästi **kasvanut ja muuttanut suuntaansa**. Aurinko on kaukana alhaalla. Voyager lähti kohti Saturnusta suuremmalla nopeudella

Missä vauhdin ottoa tarvitaan?

Nykyisillä kemiallisilla raketeilla on vaikea saada avaruusluotaimia pitkille matkoille. Esimerkiksi Nasan ja ESA:n 1997 lähettämä Cassini/Huygens kävi ottamassa vauhtia pariinkin otteeseen Venuksesta, kerran Maasta ja kerran Jupiterista. 1.7.2004 se saapui Saturnusta kiertävälle radalle ja 14.1.2005 pudotti laskeutumisluotaimen Huygensin Titan-kuuhun.
Cassini on toiminut 8 vuoden ajan erinomaisesti.

Kuvat: NASA



Pieni muutos: differentioimalla

Jos pitäisi laskea, mitä **pieni muutos** yhdessä lähtöarvossa vaikuttaa **lopputulokseen**, meillä on kaksi keinoa:

1) Lasketaan asianomaisella kaavalla uusi arvo.
Tämä onkin ainoa keino, jos lähtöarvon muutos on "suhteellisen suuri".

2) Jos lähtöarvon muutos on suhteellisesti hyvin pieni, on kätevää käyttää **differentointia**, joka läheistä sukua derivoinnille.
Tällöin $\Delta R \approx dR$ = pieni muutos säteessä R
ja $\Delta v \approx dv$ = pieni muutos nopeudessa v

Differentiointi

Maata ympyräradalla kiertävän satelliitin ratanopeuden neliö saadaan kaavasta.

$$v^2 = \frac{GM}{R}$$

Mitä vaikuttaa pienen pieni ratasäteen muutos dR?
Se saadaan differentioimalla muuttujien v ja R suhteen (muut ovat vakioita). Käytännössä derivoimme:

$$2vdv = -\frac{GM}{R^2} \cdot dR \qquad \text{josta } dv = -\frac{GM}{2vR^2} \cdot dR$$

Differentiointia voidaan käyttää, jos muutokset ovat suhteellisen pieniä. Suurilla muutoksilla pitää laskea varsinaisella kaavalla.

Pieni tangentiaalinen nopeuden muutos muuttaa ellipsirataa

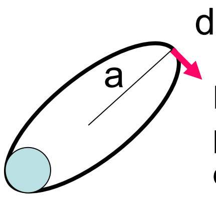
Arthur C Clarken eräässä novellissa sukkula ei päässyt Kuun pinnalta Maahan vievälle radalle. Astronautti hyppäsi avaruuspuvussa radan korkeimmassa kohdassa tangentin suuntaan. Tällöin hänen rata muuttui juuri sen verran, että astronautti ei törmännytkään alimmassa kohdassa Kuuhun.

Elliptisellä radalla $v^2 = GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)$

Hypätään, niin ettei R muutu. Miten a muuttuu?

Differentioidaan: $2vdv = \frac{GMda}{a^2}$, josta saadaan $da = \frac{2a^2vdv}{GM}$

Pieni tangentiaalinen nopeuden muutos perigeumissa ja apogeumissa



Saimme siis $$da = \frac{2a^2 v dv}{GM}$$

Radan isoakseli on 2a, joten isoakselin pidennys on 2·da. Kaava pätee, jos muutokset dv ja da ovat pieniä suhteessa v:hen ja a:han.

Jos muutos tapahtuu **ylimmässä** tai **alimmassa** kohdassa, ainoastaan radan **vastakkaisen** pään korkeus muuttuu.

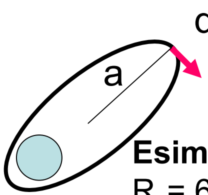
perigeumin muutos:

$$\Delta h_p = \frac{4a^2 v_a \Delta v_a}{GM}$$

apogeumin muutos

$$\Delta h_a = \frac{4a^2 v_p \Delta v_p}{GM}$$

Pieni tangentiaalinen nopeuden muutos apogeumissa → perigeum muuttuu



$$\Delta h_p = \frac{4a^2 v_a \Delta v_a}{GM}$$

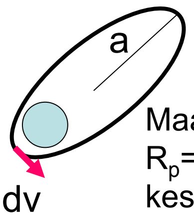
Esimerkki: Maatakiertävän aluksen alin kohta on R_p= 6500 km ja ylin kohta R_a= 150 000 km Maapallon keskipisteestä. Tällöin a = $(R_1+R_2)/2$ = 78250 km. Aluksesta potkaistaan kapseli 10 m/s apogeumissa menosuuntaan päin.

Nopeus v_a apogeumissa: $$v_a = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R_a} - \frac{1}{a}\right)} = 470 \text{ m/s}$$

$$\Delta h_p = \frac{4 \cdot (78250000\text{m})^2 \cdot 470\text{m/s} \cdot 10\text{m/s}}{3{,}986004415 \cdot 10^{14}\ \text{m}^3\text{s}^{-2}} \approx 289 \text{ km}$$

Kapselin radan alin piste nousee siis 289 km kauemmaksi

Pieni tangentiaalinen nopeuden muutos perigeumissa (edellä oli apogeumissa)



$$\Delta h_a = \frac{4a^2 v_p \Delta v_p}{GM}$$

nopeudet perigeumissa

Maatakiertävä aluksen alin kohta on R_p= 6500 km ja ylin kohta R_a= 150 000 km Maapallon keskipisteestä. Tällöin a = $(R_1+R_2)/2$ = 78250 km. Aluksesta potkaistaan kapseli 10 m/s perigeumissa lentosuuntaa vastaan (siis taaksepäin)

Nopeus v_p perigeumissa: $v_p = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R_p} - \frac{1}{a}\right)} = 10843 \text{ m/s}$

$$\Delta h_p = \frac{4 \cdot (78250000\text{m})^2 \cdot 10843\text{m/s} \cdot (-10\text{m/s})}{3{,}986004415 \cdot 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2}} \approx -6663 \text{ km}$$

Kapselin radan ylin piste alenee siis 6663 km

Cassinin nopeudenlisäys differentioimalla

Cassini-luotain kiertää Saturnusta.
18.10.2004 klo 07:00:00 UTC sen etäisyys Saturnuksesta oli 4 043 000 km ja nopeus saturnuksen suhteen 3293 m/s.
Samana päivänä klo 18:00:00 UTC etäisyys oli supistunut 3 925 000 kilometriin Saturnuksesta.
Mikä oli luotaimen nopeus klo 18:00:00 UTC?

Cassini on elliptisellä radalla, jonka iso puoliakseli on a ja massakeskuksena M on Saturnus. Nopeuden lauseke:

$$v^2 = G\,M\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

Differentioidaan lauseke v:n ja R:n suhteen. G,M ja a ovat vakioita.

Cassinin nopeudenlisäys differentioimalla

Differentioimalla saadaan

$$2vdv = -\frac{2GM}{R^2}dR$$

Josta sieventämällä

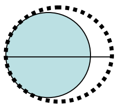
$$dv = -\frac{GM \cdot dR}{v \cdot R^2}$$

dR = - 118 000 km
v = 3293 m/s
GM=3,7931187·10^{16} m^{3}s^{-2}
(Saturnukselle)

Sijoittamalla arvot saadaan nopeuden muutos:

dv ≈ 83 m/s, jolloin uusi nopeus on
3293 m/s + 83 m/s = **3376 m/s**
Tämä poikkeaa NASA:n ilmoittamasta vain 2 m/s

Laskutehtävä: Space Cadet Andy Rocca



Space Cadet Andy Rocca on pelastautunut sukkulastaan Kuun kiertoradalle pelkässä avaruuspuvussa. Hänellä on isoisoisänsä perinne-Suomi KP/31. 500 km korkeudella radan ylimmässä kohdassa Andy huomaa, että radan alin kohta hipaisee Kuuta. Andy päättä nostaa rataa ampumalla KP:n 70 patruunan lippaan tyhjäksi lentosuuntaa vastaan, jolloin hän saa 2,1 m/s lisänopeuden. Kuinka paljon tämä nostaa radan alinta kohtaa Kuun pinnan yläpuolelle?
Putoavatko luodit Kuuhun vai jäävätkö ne kiertoradalle?

Ohje: Laske ensin Andyn nopeus elliptisellä kiertoradalla 500 km kohdalla. Kuun säde on 1738,2 km ja massa 7,348·10^{22} kg. Käytä sitten edellä johdettua perigeumin muutoslauseketta.

Kemialliset rakettimoottorit

nestevety / nestehappi on paras kantoraketeissa. Antaa jopa yli 4 km/s suihkunopeuden. Ei sovi planeettainvälisiin luotaimiin nestevedyn ja nestehapen haihtuvuuden takia.

kerosiini / nestehappi on tehokas, halpa, ei myrkyllinen

UDMH / typpitetraoksidi: varastointikelpoista, ei vaadi jäähdytystä, mutta antaa pienemmän suihkunopeuden kuin vety/happi. Haittana myrkyllisyys ja syövyttävyys.
UDMH / N_2O_4 käytetään planeettainvälisissä luotaimissa ja joissakin kantoraketeissa, mm Venäjän Protonissa.

Hydratsiini ei vaadi hapetinta. Sitä käytetään luotainten kääntämisiin ja pieniin ratakorjauksiin. Myrkyllistä.

Kiinteä polttoaine palaa sukkulan kantoraketissa.

Ydinmoottorit

Yksinkertaisin ratkaisu on kuumentaa ydinreaktorilla nestemäistä vetyä. Tällöin saadaan yli kaksinkertainen suihkunopeus kuin kemiallisilla rakettimoottoreilla. Lisäksi suihkua voidaan ylläpitää kauan.

USA:n Nerva on testattu jo 1960-luvulla maassa. Nestevetyvirta kuumennettiin U-235-polttoainetta käyttävässä grafiittihidasteisessa reaktorissa.
Moottori toimi hyvin. Nerva oli tarkoitettu Mars-lentoihin.

Venäläiset testasivat maassa 1980-luvulla moottoria RD-1041, ja sekin toimi hyvin.

Ydinmoottoreita ei kuitenkaan ole uskallettu käyttää avaruudessa poliittista ja turvallisuussyistä.

Tulevaisuuden moottori: He-3-fuusio

Lupaavin pitkän tähtäimen moottorityyppi on **helium-3** käyttävä **fuusioreaktori**. He-3-fuusiossa syntyy puhdasta energiaa, **eikä lainkaan radioaktiivisia jätteitä eikä radioaktiivista säteilyä**. 25 tonnia He-3 riittäisi tuottamaan energiaa Yhdysvaltain 1 vuoden energiantarpeen verran.

Ongelmana on fuusion synnyttämisen vaikeus. Toinen ongelma on polttoaineen saanti: Maassa He-3 on erittäin vähän, mutta Kuussa pinnassa muutaman metrin syvyyteen asti sitä on miljoona tonnia. Sieltä se saadaan talteen kuumentamalla pinta-ainetta 600 asteeseen. Jupiterin, Saturnuksen, Uranuksen ja Neptunuksen kaasukehissä on valtavia määriä He-3.
Ehkä joskus tulevaisuudessa automaattiset alukset hakevat Uranuksen kaasukehästä tonneittain helium-3-polttoainetta.

He-3-reaktori on ilmeisesti kehitettävissä tällä vuosisadalla.

Kahdessa viikossa Marsiin?

Israelilaisen Ben-Gurion –yliopiston professori Yigal Ronen on julkaissut tutkimuksen **Am-242**:n, amerikium-242, soveltuvuudesta ydinfission raaka-aineeksi ja avaruusalusten voimanlähteeksi. Am-242 voidaan valmistaa Am-241:sta ja Pu-241:stä, tosin erottelu on vaikeaa ja kallista.

Am-242:n kriittinen massa on vain sadasosa U-235:n tai Pu-239:n kriittisestä massasta. Yigal Ronenin tutkimusten mukaan fissioreaktio saadaan ylläpidetyksi jopa alle 0,001 mm paksuisessa metallikalvossa.

Toisin kuin U-235 käytettäessä, Am-242:n korkeaenergisiä fissiohiukkasia voidaan suoraan käyttää raketin suihkuna.

Ronenin mukaan Am-242-moottori mahdollistaisi 2 viikon Mars-lennon. Kemialla tarvitaan vähintään 6 kuukautta.

Antimateria ja ajoaine

Laskelmien mukaan muutama gramma **antimateriaa** riittäisi Mars-lentoon. Antivedyllä kuumennettaisiin ajoainetta. Star Trekin Enterprisen voimanlähteenä oli antimateria…

Tällä hetkellä ainoastaan Euroopan hiukkasfysiikan tutkimuslaitoksessa CERNissä tuotetaan pieniä määriä antivetyä tutkimustarkoituksiin. Syksyllä 2002 tuotettiin 50 000 antivetyatomia, jotka varastoitiin sähkömagneettiseen pulloon tutkimusta varten. Tuotantoprosessi on erittäin kallis.

Tulevaisuus näyttää, löydetäänkö kaupallisesti käyttökelpoista keinoa antimaterian valmistamiseksi. Jos löydetään, niin miehitetyt avaruuslennot ihmiselle sopivine lentoaikoineen ovat mahdollisia kaikkialle Aurinkokuntaamme.

Ionimoottori

Rakettimoottorin työntövoima F (N)

$F = k \cdot u$

jossa **k = massavirta** (kg/s)
u = suihkun nopeus (m/s)

Avaruusaluksen ongelmana on pieni hyötykuorma. Suurin osa massasta on polttoainetta. Työntövoima on suuri, mutta massavirta on suuri ja polttoaika on lyhyt.

Pitkillä lennoilla ratkaisu voi löytyä nostamalla ratkaisevasti **suihkun nopeutta**, jolloin ajomassaa tarvitaan vähän. Tällöin hyötykuorman osuutta voidaan nostaa.

Ionimoottorissa suihkutetaan esim **Xe-ioneja** suurella nopeudella, nykytekniikalla jopa **30 km/s**.
Kemiallisilla moottoreilla suihkun nopeus on vain **3 – 4 km/s**.

Ionimoottori

USA:n **Deep Space 1** testasi 1998 – 2001 ionimoottoria ja kohtasi komeetta Borrellyn. Moottorin sähköteho oli 2,1 kW.

ESA:n SMART-1 lähetettiin 27.9.2003 kohti Kuuta. Kuuta kiertämään se asettui 15.11.2004. Hidas kiihdytys!

Xenon-suihkun nopeus 16 km/s
Työntövoima 0,068 N
Massavirta noin 4 milligrammaa/s
Ionimoottorin sähköteho 480 W – 1500 W
Toiminta-aika 7000 tuntia
Luotaimen alkumassa 370 kg
Ajoainetta Xenonia 82 kg

ESA:n SMART-1 5.4.2004

Smart-1 oli kuluttanut 30 kg Xenonia. Luotaimen alkumassa M_0= 350 kg. Suihkun nopeus u=16 km/s
Aluksen rata muuttuu spiraalimaisesti, koska kiihdytys on lähes jatkuvaa.

$$\text{Nopeuden lisäys } \Delta v = u \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) = 16\ \text{km/s} \cdot \ln\left(\frac{370\ \text{kg}}{370\ \text{kg} - 30\ \text{kg}}\right) \approx 1{,}35\ \text{km/s}$$

5.4.2004 ellipsirata
perigeum 21 493 796 m, apogeum 78 468 957 m ja iso puoliakseli a = 49 981 377 m. Kiihdytys perigeumissa 10,5 h Kiihdytysaika päätettiin jatkossa lisätä 16 tuntiin. Perigeum-kiihdytys on edullisempaa kuin jatkuva kiihdytys.

SMART-1 20.6.2005 Kuuta kiertämässä

Perilune (etäisyys Kuun keskipisteestä):	2256,090 km
Apolune (etäisyys Kuun keskipisteestä):	4549,196 km
Kiertoellipsin iso puoliakseli a:	3402,643 km
Kiertoradan iklinaatio	90,232º

(luotain kulkee siis Kuun napojen yli)
Xenon-kaasua jäljellä 6 kg (lähtiessä 82 kg). Siitä 4 kg käytetään elokuussa 2005 mittausten vaatimiin radan muutoksiin. Syyskuussa 2005 käytetään 1,3 kg.

Luotain yrittää etsiä mm. vesijäätä ikuisesti pimeydessä olevista kraatterisopukoista.

ESA:n Smart-1 -tehtäviä

1. Luotaimen alkumassa oli 370 kg, ajonainetta 82 kg suihkun nopeus 16 km/s. Laske kuinka suureen nopeuden muutokseen voidaan päästä.

2. Edellä oli ratatiedot 20.6.2005. Laske niistä luotaimen kiertoaika Kuun ympäri. *(4 h 57 min)* Laske luotaimen nopeus lähimpänä ja kauimpana Kuusta. *(1705 m/s ja 845 m/s)*

3. Xenon-suihkun nopeus on 16 km/s. Laske käytetty kiihdytysjännite ja kiihdytysteho.

Ionimoottorin fysiikkaa

Xenon-atomit ionisoidaan ja saadut positiiviset ionit kiihdytetään sähkökentällä. Katodi poistaa ionien varaukset juuri ennen kuin ne poistuvat.

kentän tekemä työ muuttuu ionin liike-energiaksi

$$\frac{m_{Xe}u^2}{2} = Uq_{Xe}$$

jossa

$$\begin{cases} U & = \text{jännite} \\ m_{Xe} & = \text{Xenon-ionin massa} \\ q_{Xe} & = \text{Xenon-ionin varaus} \\ u & = \text{ionisuihkun nopeus} \end{cases}$$

Tästä saadaan ionin suihkuvirran nopeus. Mitä suurempi jännite, sitä suurempi nopeus. Massavirran k, tehon P ja suihkunopeuden u välinen yhteys saadaan seuraavasti:

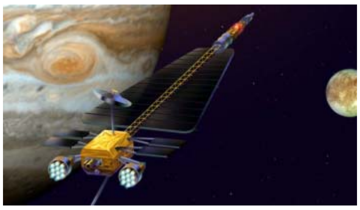
$$dW = P \cdot dt = \frac{dm \cdot u^2}{2}$$

$$\text{Tällöin } P = \frac{dm \cdot u^2}{dt \cdot 2} = \frac{ku^2}{2}$$

Ydinenergia ionimoottorin voimanlähteenä

ESA:n **Smart-1** ja Nasan **Deep Space-1** saavat sähkön aurinkokennoista. Kennojen antama teho on Jupiterin etäisyydellä on vain 1/27 ja Saturnuksen kohdalla 1/90 siitä mikä on Maan kohdalla. Matkoilla Jupiteriin ja kauemmaksi ionimoottori ei selviä ilman ydinenergiaa.

NASA suunnittelee lähettävänsä 2012 ydinkäyttöisen ionimoottorilla varustelun luotaimen **Jupiter Icy Moon Orbiter** JIMO tutkimaan Jupiterin kuita.



JIMO:n ydinreaktori antaa 100 kilowatin sähkötehon. Työntövoima on satakertainen Smart-1:een verrattuna

Kuva: NASA

Lentokoneen avulla radalle?

Satelliittien ja avaruuslentokoneen saattamisessa kiertoradalle yksi lupaava ratkaisu voisi olla lentokoneen käyttäminen kantoalustana: Lentokone vie raketin 10-15 km korkeuteen. Rakettimoottori vie sitten kuormana olevan satelliitin tai sukkulan kiertoradalle.

Satelliitin tai **sukkulan** vieminen kiertoradalle: Onnistuisi, jos kantavana lentokoneena olisi valtaisa kuljetuskone. Esimerkiksi Venäjän ja Ukrainan suuret kuljetuskoneet pystyvät nostamaan jopa sukkulan kokoisia kuormia 10 km korkeuteen. Sieltä jatkettaisiin rakettimoottoreilla.

Avaruuslentokoneen vieminen: Tähän riittää jo melko kevyt kantava kone. Esimerkiksi White Knight, joka vei kevyen ScapeShipOne-koneen 15 km korkeuteen.

SpaceShipOne 21.6.2004

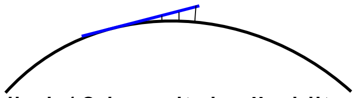
21.6.2004 SpaceShipOne oli ensimmäinen siviilialus, joka nousi 100 km korkeuteen. Aluksi suihkukone White Knight nosti aluksen 15 km korkeuteen, josta Mike Melvillen ohjaama SpaceShipOne käytti hydribirakettimoottoria muutaman minuutin. Alus kävi 100 km korkeudessa ja palasi sitten lähtökentälleen liitokoneena.

Tämä ei ollut kiertoratalento, mutta ilmeisesti jo tällaisenaan se on monille riittävän hienoa avaruusturismia. SpaceShipOne voi ottaa ohjaajan lisäksi kaksi turistia suborbitaaliradalle.

SpaceShipOn-koneen hybridimoottori on yhdistelmämoottori: hapettimena on nestemäinen dityppimonoksidi N_2O ja paloaineena kumi. Moottori on hyvin turvallinen, polttoaine ei voi räjähtää.

Rahtia Kuusta kiitoradan avulla

Pakonopeus Kuun pinnalta on 2375 m/s ja alin kiertoratanopeus 1680 m/s. Kemiallisen raketin sijasta voisi olla kannattavaa käyttää kilometrien pituista kiitorataa, Siinä kapseli kiihdytettäisiin suprajohdemagneettien avulla pakonopeuteen. Ainakin rahtialuksia voitaisiin lähettää tällä tavoin. Miehitettyjen alusten kiihdyttämisessä ongelmia tuottaa suuri kiihtyvyys. Miehistön pitäisi kellua nesteen sisällä, jolloin kiihtyvyys ei rusentaisi ihmisiä.



Esimerkiksi 10 km pituisella kiitoradalla loppunopeuden 2,5 km/s saavuttaminen vaatii 312 m/s² kiihtyvyyden

$$s = \frac{v^2}{2a}\text{, jolloin } a = \frac{v^2}{2s} = \frac{(2500\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 10\,000\ \text{m}} \approx 312\ \text{m/s}^2$$

Aurinkopurjeella tähtiin?

1900-luvun alusta lähtien on tiedetty, että fotoni eli valokvantti käyttäytyy myös hiukkasen tavoin. Sillä on liikemäärä. Osuessaan peiliin fotoni heijastuu, jolloin liikemäärä muuttuu. Tämä aiheuttaa peiliin voiman.
Voima = liikemäärän muutos aikayksikköä kohti

Venäläiset rakettipioneerit Tsiolkovski ja Tsander ehdottivat 1920-luvulla aurinkopurjeen käyttämistä avaruusaluksen kiihdytyksen lähteenä. 21.6.2005 Cosmos 1:n piti testata aurinkopurjetta, mutta satelliitti ei päässyt radalleen.

$$\text{Valokvantin energia } E_{kv} = hf = \frac{hc}{\lambda}, \quad \text{kvantin nopeus} = c, \quad \text{Energiaa vastaava massa } m = \frac{E_{kv}}{c^2}$$

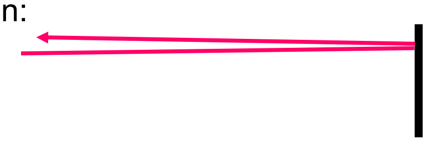
$$\text{Kvantin liikemäärä } p = mc = \frac{E_{kv}}{c^2} \cdot c = \frac{E_{kv}}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{hc}{c\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

Valon säteilypaine

Valokvantti osuu 100 % heijastavaan peiliin nopeudella c ja heijastuu takaisin vastakkaiseen suuntaan nopeudella c

Liikemäärän muutos on tällöin:

$$\Delta p = m \cdot 2c = \frac{E_{kv}}{c^2} \cdot 2c = \frac{2E_{kv}}{c}$$



(Jos peili olisi absoluuttisen musta, $\Delta p = \frac{E}{c}$)

Oletetaan, että teholla P valoa tulee peiliin ajan dt

$$\Delta p = \frac{dE}{c^2} \cdot 2c = \frac{Pdt}{c^2} \cdot 2c = \frac{2Pdt}{c}$$

Seinään kohdistuu voima $F = \frac{dp}{dt} = \frac{2P}{c}$

Valon säteilypaine Maan lähellä

Auringon säteilyteho yhden neliömetrin alalle
Maan kohdalla on P_0 = 1350 W

Kuinka suurella voimalla auringonvalo vaikuttaa yhden neliömetrin kohtisuoraan 100 % heijastavaan pintaan?

$$F = \frac{2P}{c} = \frac{2 \cdot 1350\ \mathrm{W}}{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m}} \approx 9{,}0 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}$$

Säteilypaine on siis 9,0 · 10^{-6} Pascalia

1 km · 1 km = 1000 000 m^2 aurinkopurjeeseen kohdistuu voima

F = 9,0·10^{-6} Pa · 1000 000 m^2 = 9,0 N

Aurinkopurjeella kauas

Oletetaan, että meillä on 1 km^2 purje, jonka massa tiheydellä 1 g/m^2 on 1000 kg ja hyötykuorma on 1000 kg. Millä kiihtyvyydellä luotain lähtee ja kuinka suuren nopeuden se saavuttaa 1 vuoden kiihdytyksellä?

$$\text{Alussa } a = \frac{F}{m} = \frac{9{,}0\ \text{N}}{2000\ \text{kg}} \approx 0{,}0045\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4{,}5\ \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

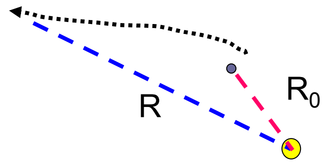
Jos kiihtyvyys pysyisi 1 vuoden samana, nopeus olisi

$$v_{1v} = 365 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s} \cdot 0{,}0045\ \text{m/s}^2 \approx 140\ \text{km/s}$$

Mutta vuodessa luotain olisi lentänyt jo 2,2 miljardin km, jolloin Auringon säteilyteho olisi laskenut murto-osaansa...

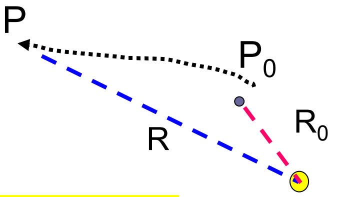
Aurinkopurjeella kauas

Meidän on siis otettava huomioon, että Auringon säteilyteho pinta-yksikköä kohti laskee koko ajan, jolloin kiihtyvyys laskee samassa mitassa, kun luotain loittonee yhä kauemmaksi Auringosta.
Oletetaan seuraavassa, että ollaan päästy pois Maan vaikutuspiiristä ja kiihdytetään poispäin Auringosta. Meillä on samalla maan ratanopeus, jolloin rata on seuraava



Auringon säteilyteho on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön.

Aurinkopurjeella kauas



Auringon säteilyteho $P = \dfrac{R_0^2}{R^2} \cdot P_0$

Purjeeseen kohdistuva voima $F = \dfrac{2P}{c} = \dfrac{2R_0^2 P_0}{cR^2}$

Kiihtyvyys $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{F}{m} = \dfrac{2R_0^2 P_0}{mcR^2}$

Joten $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{2R_0^2 P_0}{mcR^2}$

Aurinkopurjeella kauas

Saimme differentiaaliyhtälön $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{2R_0^2 P_0}{mcR^2}$

Tehdään vippaskonstilla $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dR} \cdot \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{2R_0^2 P_0}{mcR^2}$

jossa ilmiselvästi $\dfrac{dR}{dt} = v =$ nopeus poispäin Auringosta

Saimme siis $\dfrac{dv}{dR} v = \dfrac{2R_0^2 P_0}{mcR^2}$

Erotetaan integrointia varten muuttujat:

$$vdv = \frac{2R_0^2 P_0}{mcR^2} dR$$

Aurinkopurjeella kauas

Integroidaan. Integrointirajat seuraavasti: nopeus alussa 0, lopussa v, etäisyys Auringosta alussa R_0, lopussa R

$$\int_0^v v\,dv = \int_{R_0}^{R} \frac{2R_0^2 P_0}{mcR^2}\,dR$$

Sievennettynä saadaan aurinkoluotaimen nopeudeksi etäisyydellä R Auringosta:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{2R_0^2 P_0}{mc}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\text{Josta } v = \sqrt{\frac{4R_0^2 P_0}{mc}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right)}$$

Aurinkopurjeella kauas

Saimme siis nopeudeksi etäisyydellä R Auringosta:

$$v = \sqrt{\frac{4R_0^2 P_0}{mc}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right)}$$

R_0 = 150·10⁹ m = Maan ratasäde
P_0 = 1350·10⁶ W = peilin valoteho
m = 2000 kg=luotaimen massa
c = 3·10⁸ m=valon nopeus

Nyt voimme laskea, minkä nopeuden luotain saa, kun se on poistunut Aurinkokunnasta tai on niin kaukana, ettei Auringon valo enää ”tunnu”. Tällöin R on ”ääretön”.

$$v_\infty = \sqrt{\frac{4R_0^2 P_0}{mc}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{\infty}\right)} = \sqrt{\frac{4R_0 P_0}{mc}} = \sqrt{\frac{4\cdot 150\cdot 10^9\,m\cdot 1350\cdot 10^6\,W}{2000\text{ kg}\cdot 3\cdot 10^8\,m}} \approx 36{,}7\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Siis kyseisen aurinkoluotaimen maksiminopeus on **36,7 km/s** Maan suhteen, kun luotain poistuu Aurinkokunnasta.

Laser Kuussa vauhdittaa aurinkopurjetta

Edellä todettiin, että aurinkopurjeeseen tuleva Auringon säteilyteho heikkenee nopeasti, kun lennetään kauas.

Yksi esitetty ratkaisu on sijoittaa Kuuhun jättimäinen laserasema, joka kiihdyttää aurinkopurjetta. Tällöin purjeeseen kohdistettu valoteho pysyy vakiona

$$\text{Aluksen kiihtyvyys } a = \frac{F}{m} = \frac{2P}{mc}$$

P = laserin valoteho
m = aluksen massa
c = valon nopeus

10 gigawatin laser antaa 1 km^2 purjeella varustetulle 2000 kg kokonaismassaiselle aluksen kiihtyvyyden 0,033 m/s^2, mikä vie aluksen 1 vuodessa $1{,}7 \cdot 10^{13}$ km päähän – ulos Aurinkokunnasta.

Lentonopeus lähellä valon nopeutta

Lennettäessä lähes valon nopeudella 300 000 km/s emme enää voi käyttää edellä olevia newtonilaisia liikeyhtälöitä. Tilanne tulee eteen ehkä vielä tällä vuosituhannella...

Einsteinin suhteellisuusteorian mukaan nopeasti kiitävän avaruusaluksen aika kulkee hitaammin kuin Maahan jäävien.

$$\text{Maan aika} = \frac{\text{avaruuskiitäjän aika}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Olkoon lentonopeus on 0,99c. Jos aluksessa kello näyttää aikaa kuluneen 1 vuosi, niin Maassa aikaa on kulunut 7 vuotta. Alus on Maasta katsoen kulkenut 7 valovuoden matkan.

Aluksen kiihdytys ja suhteellisuusteoria

Newtonin liikeyhtälöt johdetaan yhtälöstä $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$

Suhteellisuusteoriassa massa korvataan lausekkeella

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, jossa m_0 toisinaan sanotaan lepomassaksi

Näin Newtonin yhtälö muuttuu muotoon $F = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$

Valopurjeella lähes valon nopeuteen

Oletetaan Kuussa on 100 Gigawatin laser, joka kiihdyttää 1 km^2 kokoisella valopurjeella varustettua 2000 kg massaista alusta. Kiihdytetään 10 vuotta. Mikä on nopeus?

Laser antaa alukselle vakiotyöntövoiman $F = \frac{2P}{c} = 666{,}7\ N$

$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$, josta erottamalla $Fdt = d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$

Alussa t=0, v=0, jolloin integroinnin jälkeen $F \cdot t = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Valopurjeella lähes valon nopeuteen

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä nopeus $v = \dfrac{c}{\sqrt{1+\left(\dfrac{m_0 c}{Ft}\right)^2}}$

Kiihdytetään 10 vuoden ajan, m= 2000 kg, F =666,7 N
Newtonilainen lasku antaa nopeuden **105 000 km/s**.
Suhteellisuusteoria antaa nopeudeksi **0,33068c = 99200 km/s**.
Suhteellisuusteorian antama tulos on oikeampi.

Lisäämällä kiihdyttävien lasereiden tehoa (useampia lasereita) saataisiin nopeus teoriassa lähelle valon nopeutta jo muutamassa vuodessa. On toinen kysymys, mistä energia saadaan, pysyykö säde koossa jne…

Suhteellisuusteoria ja painovoima

Einsteinin yleisen suhteellisuusteorian mukaan avaruuden geometria ja aika riippuvat massoista, siis painovoimasta. Suuressa painovoimakentässä aika kulkee eri tavalla kuin heikossa kentässä.

Lähellä mustaa aukkoa tai neutronitähteä on erittäin suuri painovoima. Einsteinin kenttäyhtälöiden perusteella voidaan laskea painovoiman aiheuttama ajankulun muutos

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}$$

Δt = kaukaisen havaitsijan aika pienessä painovoimakentässä

$\Delta\tau$ = Aikaero matkan R etäisyydessä massasta M (musta aukko, neutronitähti)

Satelliittipaikannus ja Einstein

Tällä hetkellä on toiminnassa 2 satelliittipaikannukseen perustuvaa järjestelmää: USA:n GPS ja Venäjän GLONASS. Niistä vain GPS toimii täysitehoisesti.
Vuoden 2008 jälkeen toiminnassa pitäisi olla myös EU:n ja ESA:n GALILEO.

Satelliittipaikannus perustuu erittäin tarkkoihin kelloihin, jotka ovat maa-asemalla ja satelliiteissa.
Vastaanotin saa tiedot aikaeroista vähintään 4 satelliitista, joista sitten lasketaan pituus-, leveys- ja korkeuskoordinaatti.

Koska satelliittien **nopeus** on useita kilometrejä sekunnissa, ja **painovoima** kiertoradalla on pienempi kuin Maassa, aikaeroissa käytetään suhteellisuusteorian mukaisia korjauksia.

GPS, Einstein ja ratanopeus

GPS-satelliitit kiertävät Maata 26553 km etäisyydellä Maapallon keskipisteestä nopeudella 3874 m/s.

Satelliitin kello käy vuorokaudessa $86400 \text{ s} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 86400 \text{ s} \cdot (1-\frac{v^2}{2c^2}) \approx 86400 \text{ s} - 0{,}000\,0072 \text{ s}$

Vuorokaudessa 86400 s GPS-satelliitin kello **jätättää 7,2 mikrosekuntia satelliitin liikkeen takia**

Ratanopeus ei ole ainoa vaikuttava tekijä.
Satelliitti kiertää pienemmässä painovoimassa kuin mitä on Maapallon pinnalla. Täten satelliitin kello käy nopeammin kuin Maapallon pinnalla oleva vertailukello. Lasketaan tästä aiheutuva aikaero.

GPS, Einstein ja painovoima

Δt = kaukaisen havaitsijan aika pienessä painovoimakentässä
$\Delta\tau$ = Aikaero matkan R etäisyydessä massasta M

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} \approx \Delta t (1 - \frac{GM}{c^2 R})$$

$$\Delta\tau_{Maa} \approx \Delta t(1 - \frac{GM}{c^2 R_{Maa}}) \quad \text{ja } \Delta\tau_{GPS} \approx \Delta t(1 - \frac{GM}{c^2 R_{GPS}})$$

Sijoitetaan Δt = 1 vrk = 86400 s, R_{Maa} = 6370 000 m ja R_{GPS} =26 553 000 m
Satelliitin kellon ja Maapallon pinnan kellon aikaeroksi saadaan +45,7 mikrosekuntia. Siis satelliitin kello **edistää 45,7 mikrosekuntia painovoiman takia**

GPS ja Einstein: Yhteenveto

Vuorokaudessa 86400 s GPS-satelliitin kello **jätättää 7,2 mikrosekuntia satelliitin liikkeen takia**

Vuorokaudessa kiertoradan vähäisemmän painovoiman takia GPS-satelliitin kello **edistää 45,7 mikrosekuntia**

GPS-Satelliitin kello **edistää** 45,7 μs – 7,2 μs = **38,5 μs** vuorokaudessa. Jos tätä ei korjattaisi, paikannusvirhe olisi vuorokaudessa noin 11, 5 kilometriä

Eurooppalaisen Galileo-paikannussatelliiteilla vastaavat korjaukset tulevat olemaan -6,4 μs ratanopeudesta ja +47,4 μs painovoimasta. Nettovaikutus on siis +41 μs.

Cheelat neutronitähden pinnalla

Robert Forwardin hard sfici-romaanissa ”Lohikäärmeen muna” neutronitähden pinnalla asusti cheeloiksi kutsuttuja olioita. Neutronitähteä tuli tutkimaan ihmisten avaruusalus.

Olkoon neutronitähti Auringon massainen M = 2·10^{30} kg ja säteeltään 10 km. Ulkopuolisen tarkkailijan kellon mukaan joku tapahtuma kesti neutronitähden pinnalla 60 minuuttia.
Kuinka kauan se kesti neutronitähden pinnalla olevien mielestä?

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2R}} \approx 60\ \text{min} \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{30}\text{kg}}{(3 \cdot 10^8\text{m/s})^2 \cdot 10000\text{m}}}$$

≈ 60 min · 0,8397 ≈ 50 minuuttia

Vuorovesi-ilmiö

Kuu vetää Maapalloa puoleensa, jolloin Kuun puolella vedet nousevat. Miksi vesi nousee myös vastakkaisella puolella Maapalloa?

Selitys löytyy vetovoimien erosta. Kuun vetovoima on suurempi Kuuta lähellä olevaan osaan kuin vastakkaiseen puoleen. Tämä voimien **erotus** pyrkii venyttämään Maapalloa, jolloin herkkäliikkeiset vedet kasautuvat vastakkaisille puolille. Myös maankuori venyy, mutta vain muutamia kymmeniä senttejä.

Vuorovesi-ilmiö

Voimien erotus voidaan laskea joko vähennyslaskulla tai suoraan differentioimalla. Differentiaali antaa painovoiman kiihtyvyyden muutoksen, kun etäisyys muuttuu dR:n verran.

Massan M aiheuttama painovoimakiihtyvyys a etäisyydellä R on

$$a = \frac{GM}{R^2}$$

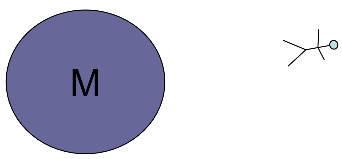
$$\text{Differentioimalla } da = -\frac{2GM}{R^3} \cdot dR$$

Joten kiihtyvyyksien ero Δa etäisyyksillä R ja R+ΔR on:

$$\Delta a = \frac{2GM}{R^3} \cdot \Delta R$$

Ero siis on hyvin pieni, jos etäisyys on suuri. Siksi Auringon aiheuttama vuorovesivoima on pienempi kuin Kuun.

Taikonautti neutronitähden lähellä



massa M = $2 \cdot 10^{30}$ kg
Etäisyys R = 1000 km
Vuorovesikiihtyvyys Δa = ?

Taikonautti on avaruuskävelyllä 1000 km päässä neutroni-tähdestä, joka 10 km säteinen ja Auringon massainen. Jos taikonautin pituus on 1,7 m, pään ja jalkojen välinen **vuorovesivoima** venyttää taikonauttia kiihtyvyydellä Δa:

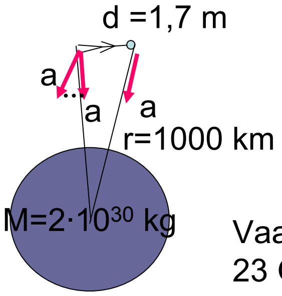
$$\Delta a = \frac{2GM}{R^3} \cdot \Delta R = \frac{2 \cdot 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \mathrm{Nm^2 kg^{-2}} \cdot 2 \cdot 10^{30} \mathrm{kg}}{(1000\,000 \mathrm{\ m})^3} \cdot 1{,}7 \mathrm{\ m} \approx 450 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

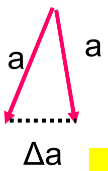
Taikonautti kokee vuorovesivoiman 45 G-voiman suuruisena ja repeytyy kuin Prokrusteen vuoteen uhri…Jos hän olisi 10 000 km päässä vuovesivoimat olisivat vain 0,450 m/s²

Taikonautti neutronitähden lähellä

Entäpä, jos taikonautti on asettunut **vaakasuoraan** radan suuntaisesti? Millaisia **vuorovesivoimia** hän kokee?

Jalkoihin ja päähän kohdistuu yhtä suuri kiihtyvyys, mutta suunnassa on eroa. Tästä johtuen kiihtyvyysero puristaa taikonauttia kokoon.





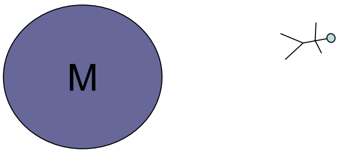
Yhdenmuotoisuudesta:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{d}{r}\text{, josta } \Delta a = \frac{a \cdot d}{r}$$

$$\Delta a = \frac{a \cdot d}{r} = \frac{GM \cdot d}{r^2 \cdot r} = \frac{GMd}{r^3} \approx 226 \text{ m/s}^2$$

Vaaka-asentoinen taikonautti puristuu kokoon 23 G-voiman kiihtyvyydellä

Taikonautti neutronitähden lähellä



massa M = $2 \cdot 10^{30}$ kg
Etäisyys R = 1000 km

Kuinka suuri on taikonautin kiertoaika neutronitähden ympäri Mikä on ratanopeus? Jos kaukaisen havaitsijan mielestä taikonautti oleskeli neutronitähden lähellä 60 minuuttia, kuinka kauan oleskeluaika oli taikonautin mielestä?

Ratanopeus ja kiertoaika

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \approx 12\ 000 \text{ km/s}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx 0{,}54 \text{ s}$$

Taikonautin oleskeluaika

$$\Delta\tau = 60\text{min} \cdot \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2R}} \approx 59{,}91\text{min}$$

Taikonautin kello kävi 5,3 s hitaammin

Melkoista kyytiä!

Avaruuslentojen fysiikan linkkejä

Mark Waden valtaisa tietopankki hakemistoineen:
http://www.astronautix.com

Nasan lennoista vastaava JPL
http://www.jpl.nasa.gov

Euroopan avaruusjärjestö ESA
http://www.esa.int

Venäläisiä avaruusuutisia
http://www.rol.ru/news/misc/spacenews/

Venäjän avaruusjärjestö
http://www.rosaviakosmos.ru/english/eindex.htm

Suomalainen verkkolehti **http://www.avaruusmgz.info/**